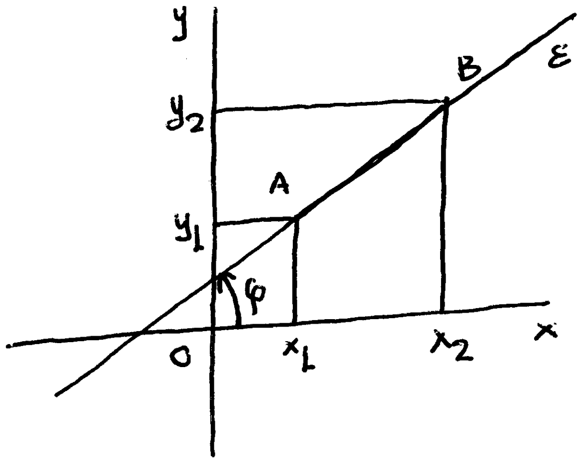
Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις (1)

1) Η Έννοια της Παραγώγου



Στο προηγούμενο σχήμα η ευθεία ε που περνάει από τα σημεία A και B έχει κλίση (ή συντελεστή διευθύνσεως)

$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

και εξίσωση $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \iff$

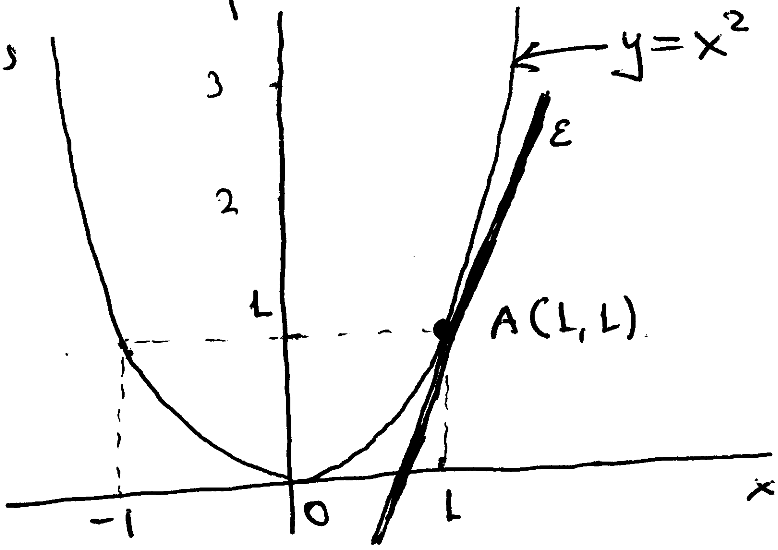
$$\iff \boxed{y = \underbrace{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}_{a} x - x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1}$$

Το $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

Αν ξέρω το $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και τις συντεταγμένες (x_1, y_1) ενός σημείου A μπορώ να βρω την εξίσωση της ευθείας ε: $\boxed{y = ax - ax_1 + y_1}$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\boxed{f(x) = x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

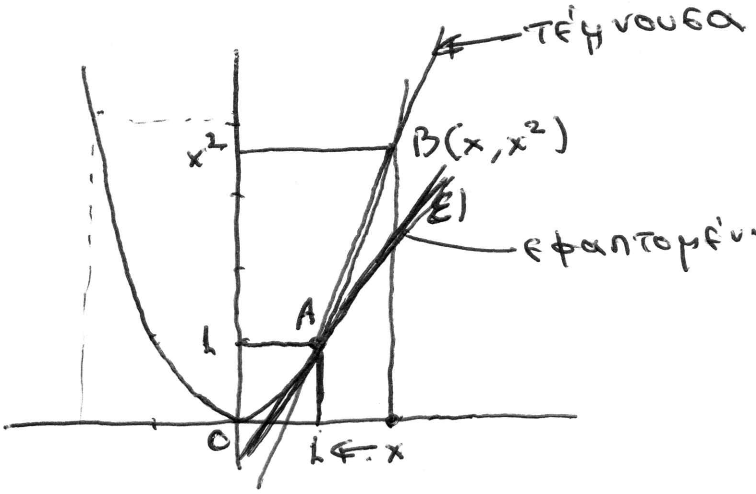
Η γραφική της παράσταση είναι μια παραβολή της μορφής



Ερώτημα: Πώς μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,1)$;

Εφόσον ξέρουμε ένα σημείο της $A(1,1)$ αρκεί να βρούμε την κλίση της. Αλλά δεν ξέρουμε άλλο σημείο αυτής! Πώς θα βρω την κλίση της (ε);

Ο Leibniz σκέφτηκε το εξής:
Αν πάρω ένα x κοντά στο 1 και το αντίστοιχο σημείο $B(x, x^2)$ της παραβολής τότε θα έχω μιά τέμνουσα της γραφικής παράστασης.



Η κλίση της τέμνουσας ισούται με $\frac{x^2-1}{x-1}$.

Αν το x πλησιάσει αρκετά κοντά στο $x_0=1$, το B θα πλησιάσει το A και η τέμνουσα AB θα πλησιάσει την εφαπτομένη ε.

Άρα οριακά ο συντελεστής διεύθυνσης $\frac{x^2-1}{x-1}$ (ή κλίση) της τέμνουσας θα πλησιάσει την κλίση της εφαπτομένης ε.

Συνεπώς η κλίση της εφαπτομένης ε θα ισούται με το όριο

$$a=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=\boxed{2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε θα είναι λοιπόν $y=ax+β=2x+β$ και αφού το A(1,1)

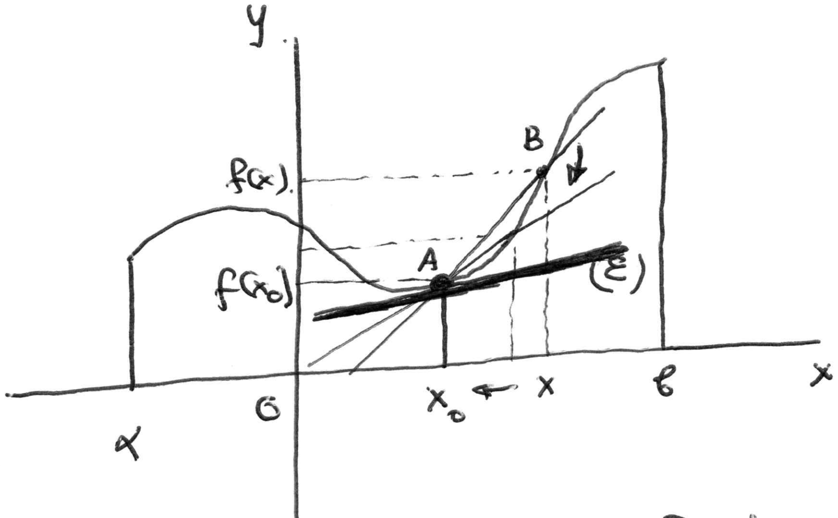
κλίση

είναι σημείο της εφαπτομένης ευθείας

θα έχουμε: $1=2\cdot 1+β \Leftrightarrow β=-1$.

Άρα εξίσωση της ε: $\boxed{y=2x-1}$

Το ίδιο μπορώ να κάνω και για την εφαπτομένη σχεδόν κάθε γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης



Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας (αν υπάρχει) της γραφικής παράστασης της f σ' ένα σημείο x_0 θα ισούται με το όριο

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$$

και καλείται <u>παράγωγος</u> της f στο σημείο x_0.

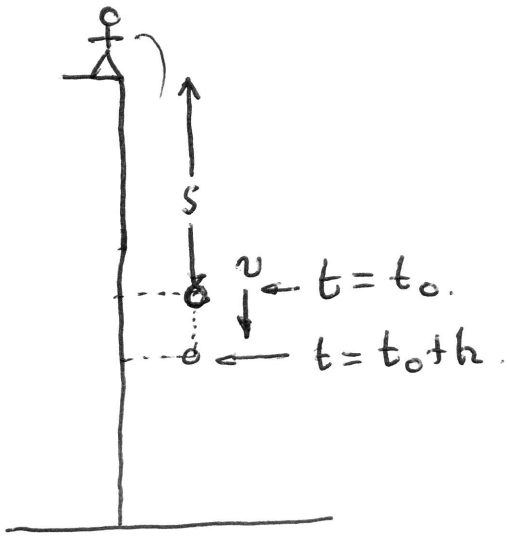
Άλλος συμβολισμός: $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ ή $D_x f(x_0)$

Αν θέσουμε $h = x - x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, τότε $x = x_0 + h$

και έχουμε ισοδύναμα:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Άλλη προσέγγιση: (Newton)



Αν αφήσουμε να πέσει ένα σώμα κατακόρυφα, τότε το διάστημα που διανύει σε χρόνο t ισούται με

$$S(t)=\frac{1}{2}gt^2, \quad \text{όπου } g \cong 9{,}81\,m/sec^2$$

η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Ποιά είναι η ταχύτητα $v(t_0)$ τη χρονική στιγμή t_0;

Στον χρόνο t_0 το σώμα έχει διανύσει απόσταση $S(t_0)=\frac{1}{2}gt_0^2$. Μετά από "μικρό" χρονικό διάστημα h (ή πριν από μικρό χρονικό διάστημα h) το σώμα διανύει διάστημα

$$S(t_0+h)=\frac{1}{2}g(t_0+h)^2.$$

Η <u>μέση ταχύτητα</u> κατά το χρονικό διάστημα h είναι

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}$$

Η $\boxed{\text{ακριβής ταχύτητα}}$ του κινητού την χρονική στιγμή t_0 θα είναι

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t_0+h)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2}{h} = \cancel{\tfrac{1}{2} g (t_0+2h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} g \frac{(t_0+h-t_0)(t_0+h+t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} g \frac{\cancel{h}(2t_0+h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \frac{1}{2} g \lim_{h\to 0} (2t_0+h) = \frac{1}{\cancel{2}} g \cdot \cancel{2} t_0 = \boxed{g t_0}$$

Γενικά, αν ξέρουμε το διάστημα $s(t)$ συναρτήσει του χρόνου t, τότε η ταχύτητα $v(t_0)$ τη χρονική στιγμή t_0 ισούται με

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$$

που είναι η παράγωγος $s'(t_0)$ στο σημείο $t = t_0$.

Άρα $v(t_0) = \frac{ds}{dt}(t_0) = s'(t_0)$

Γενικά, αν μια συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ φραγμένο ή άπειρο διάστημα (π.χ. $\Delta = (a, b)$ ή $(a, +\infty)$ ή $(-\infty, a)$ ή $[a, +\infty)$ κτλ) και σε κάθε σημείο x του Δ ορίζεται το όριο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $f': \Delta \to \mathbb{R}$ που λέγεται <u>παράγωγος της f</u>

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $f(x) = c$ σταθερά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Τότε $f'(x) = (c)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

2). $f(x) = x^n$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$\overline{(a^n - b^n)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})}$

Β' Λυκείου

Έχουμε: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =$

$$= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}}_{n \text{ όροι}}.$$

Κάθε όρος του αθροίσματος είναι της μορφής

$\boxed{x^{n-1-k} x_0^{k}}$, όπου $k=0,1,\dots,n-1$.

Όταν το $x \to x_0$ ο όρος τείνει στο $x_0^{n-1-k} x_0^{k} = x_0^{n-1}$. Επόσον το άθροισμα έχει n όρους, τότε αυτό τείνει στο

$$\boxed{n x_0^{n-1}}.$$

Δηλαδή $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = n x_0^{n-1}$.

Γενικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}}$

3) Αν $x \in (0, +\infty)$ και $a \in \mathbb{R}$ (π.χ. $a = -\frac{1}{2}$ ή $a = \sqrt{2}$)

Τότε $(x^a)' = a x^{a-1}$.

Σαν συμπέρασμα $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, που ορίζεται μόνον για $x > 0$.

<u>Αποδεικνύονται τα εξής:</u>

α) $(\sin x)' = \cos x$

β) $(\cos x)' = -\sin x$

γ) $(e^x)' = e^x$, όπου $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2{,}71\dots$

δ) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

<u>Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.</u>

Κανόνες παραγώγισης

1). $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$, όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, f, g παραγωγίσιμες.

3). Κανόνας του Leibniz:

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

4) Πηλίκο συναρτήσεων: Αν f και g παραγωγίσιμες και $g(x) \neq 0$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού, τότε

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Εφαρμογές - Παραδείγματα:

1). Έστω $n = 1, 2, 3, \dots$ και $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Τότε $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

Απόδειξη: $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = (-n)\, x^{(-n)-1} =$

$= -n x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

2). $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ και $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Απόδειξη: $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

<u>Άλλα απλά παραδείγματα:</u>

α) $(x)' = 1$. Πράγματι $(x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

Αλλιώς $(x)' = \lim_{t \to x} \frac{t-x}{t-x} = \lim_{t \to x} 1 = 1$.

β). $$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-5}{x^2+7}\right) = \left(\frac{3x-5}{x^2+7}\right)' = \frac{(3x-5)'(x^2+7) - (3x-5)(x^2+7)'}{(x^2+7)^2} =$$

$$= \frac{(3(x)' - (5)')(x^2+7) - (3x-5)((x^2)' + (7)')}{(x^2+7)^2} =$$

$$= \frac{(3-0)(x^2+7) - (3x-5)(2x+0)}{(x^2+7)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2+7) - 2x(3x-5)}{(x^2+7)^2} = \frac{3x^2 + 21 - 6x^2 + 10x}{(x^2+7)^2} = \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2+7)^2}$$

$$\boxed{\text{Γενικά } (f(x) + c)' = f'(x) \text{ και αγνοούμε το } c \text{ γιατί } (c)' = 0.}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^4+1}+\frac{3}{x}\right)=2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4+1}\right)+3\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=-2\frac{(x^4+1)'}{(x^4+1)^2}-3\frac{1}{x^2}=-2\frac{4x^3}{(x^4+1)^2}-\frac{3}{x^2}=$$

$$=-\left(\frac{8x^3}{(x^4+1)^2}+\frac{3}{x^2}\right)$$

γ). $y=x^{12}+5x^{-2}-\pi x^{-10}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=12x^{11}-10x^{-3}+10\pi x^{-11}=$$

$$=12x^{11}-\frac{10}{x^3}+\frac{10\pi}{x^{11}}$$

δ). $y=(x^4+2x)(x^3+2x^2+1)$

$$y'=(x^4+2x)'(x^3+2x^2+1)+(x^4+2x)(x^3+2x^2+1)'=$$

$$=(4x^3+2)(x^3+2x^2+1)+(x^4+2x)(3x^2+4x)=$$

$$=4x^6+2x^3+8x^5+4x^2+4x^3+2+3x^6+4x^5+$$

$$+6x^3+8x^2=7x^6+12x^5+12x^3+12x^2+2$$

ε). $y=\dfrac{5x^2+2x-6}{3x-1}$

$$y'=\frac{(5x^2+2x-6)'(3x-1)-(5x^2+2x-6)(3x-1)'}{(3x-1)^2}=$$

$$=\frac{(10x+2)(3x-1)-(5x^2+2x-6)\cdot 3}{(3x-1)^2}=$$

$$=\frac{30x^2+6x-10x-2-15x^2-6x+18}{(3x-1)^2}=$$

$$=\frac{15x^2-10x+16}{(3x-1)^2}$$

Ο τύπος του γινομένου

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

γενικεύεται και για τρεις και περισσότερες συναρτήσεις:

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

<u>Παράδειγμα:</u> $x^2\cos x\,(2x+\sin x) = y = f(x)$

$$f'(x) = (x^2)'\cos x\,(2x+\sin x) + x^2(\cos x)'(2x+\sin x) + x^2\cos x\,(2x+\sin x)' =$$
$$= 2x\cos x\,(2x+\sin x) - x^2\sin x\,(2x+\sin x) + x^2\cos x\,(2+\cos x).$$

<u>Άλλα παραδείγματα:</u> α) $y = \sin x\cos x$

$$y' = (\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$ (Β' Λυκείου)

β) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y' = \dfrac{\cos x\cdot x - 1\cdot\sin x}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

γ) $y = \dfrac{x\cos x + \sin x}{x^2+1}$, $\cancel{y' = (x\cos x+\sin x)'(x^2+1) - (x\cos x+\sin x}$

$$y' = \frac{(x\cos x+\sin x)'(x^2+1) - (x\cos x+\sin x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - x\sin x + \cos x)(x^2+1) - (x\cos x+\sin x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

= .... κάντε πράξεις.

δ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)=\cot x$ στο $x=\frac{\pi}{4}$.

$f'(x)=(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$. Άρα $f'\left(\overset{45^\circ}{\frac{\pi}{4}}\right)=-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2.$$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cot\frac{\pi}{4}=1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x=x_0$ είναι:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Άρα εδώ είναι $y=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1=\boxed{-2x+\frac{\pi}{2}+1}$.

Ο Κανόνας της αλυσίδας – Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν η f παραγωγίζεται στο σημείο $x=g(x_0)$ και η g παραγωγίζεται στο σημείο $x=x_0$, τότε και η $f\circ g$ παραγωγίζεται στο σημείο $x=x_0$ και ισχύει

$$\boxed{(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)}$$ ή

αλλιώς

$$\boxed{(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Παραδείγματα:

α) $f(x)=(2x^2-4x+1)^{60}$.

Εδώ η f είναι σύνθεση $g\circ h$, όπου

$g(x)=x^{60}$ και $h(x)=2x^2-4x+1$.

Το μέσα μέρος

Άρα $f'(x)=(g(h(x)))'=$

$=g'(h(x))\cdot h'(x)=60(2x^2-4x+1)^{59}\cdot(2x^2-4x+1)'=$

$=60(2x^2-4x+1)^{59}(4x-4)=240(2x^2-4x+1)^{59}(x-1)$

β) $f(x)=3\sin 3x$. Εδώ $g(x)=3\sin x$, $h(x)=3x$.

$f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)=3\cos 3x\,(3x)'=$

$=3\cos 3x\cdot 3=9\cos 3x$.

Γενικά $(f(g(h(\varphi(x)))))'=f'(g(h(\varphi(x))))\cdot g'(h(\varphi(x)))\cdot$

$\cdot h'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

Αλλιώς (μνημονικός κανόνας)

Αν $y=f(u)$, $u=g(x)$, τότε

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

~~γ)~~ $\cancel{y=\frac{1}{(2x^5-7)^3}\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{u=2x^5-7}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}=}$

$\cancel{=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^3}\right)\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{3}{u^4}}$

Γενικότερα:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dw}\,\frac{dw}{dx} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Παράδειγμα: 1) $y = \dfrac{1}{(2x^5-7)^3}$

εδώ $u = 2x^5 - 7$ και $y = \dfrac{1}{u^3}$.

Άρα $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\,\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{u^3}\right)\dfrac{du}{dx} =$

$= -\dfrac{3}{u^4}\cdot\dfrac{d}{dx}(2x^5-7) = -\dfrac{3}{(2x^5-7)^4}(2x^5-7)' =$

$= -\dfrac{3(10\cdot x^4)}{(2x^5-7)^4} = -\dfrac{30x^4}{(2x^5-7)^4}$

2). $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)' = \dfrac{(x^2(1-x)^3)'(1+x) - x^2(1-x)^3(1+x)'}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{[2x(1-x)^3 + x^2((1-x)^3)'](1+x) - x^2(1-x)^3\cdot 1}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{(2x(1-x)^3 + x^2\,3(1-x)^2(1-x)')(1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{(2x(1-x)^3 \cancel{+} - 3x^2(1-x)^2)(1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} =$

$= \ldots$ πράξεις

3) Αν η f παραγωγίζεται σε κάθε x, τότε βρείτε τα $\dfrac{d}{dx}(f(x^3))$ και $\dfrac{d}{dx}(f(x)^3)$.

Λύση:

$$\frac{d}{dx} f(x^3) = f'(x^3)\,(x^3)' = 3x^2 f'(x^3)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)^3\right) = 3f(x)^2 \frac{d}{dx} f(x) = 3f(x)^2 f'(x)$$

3) $(\sin^3(4x))' = 3\sin^2(4x)\cdot\cos(4x)\cdot 4 =$
$= 12\sin^2(4x)\cos(4x)$

$y = u^3, \quad u = \sin w, \quad w = 4x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dw}\,\frac{dw}{dx} = 3u^2\cdot\cos w\cdot 4 =$$

$$= 3\sin^2(4x)\cdot\cos(4x)\cdot 4 = 12\sin^2(4x)\cos(4x)$$

Παράγωγοι Ανώτερης τάξης

Αν η παράγωγος f' της f παραγωγίζεται στο x γράφουμε $f''(x) = (f'(x))'$ ή $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ ή $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$

Αυτή λέγεται 2η παράγωγος.

Ομοίως ορίζεται η 3η παράγωγος

$$f'''(x) = (f''(x))' = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$$

και μετά η 4η, η 5η κ.ο.κ.

Από την 4η ή την τρίτη ~~σε~~ παράγωγο δεν βάζουμε τόνους αλλά αριθμούς σε παρένθεση:

Π.χ. $f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$

$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4} f(x)$ κ.ο.κ.

Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Αν η $f: A \to B$, όπου A, B ανοικτά διαστήματα είναι:

1) Παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$.

2) f είναι 1-1 και επί, δηλαδή $f(A) = B$ και αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$

3) Αν $f'(x) \neq 0$, τότε η <u>αντίστροφη συνάρτηση</u> $f^{-1}: B \to A$

Παραγωγίζεται στο σημείο $y = f(x)$ και

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

1) $f(x) = x^2$, $x \in (0, +\infty)$

Τότε $f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$

και η αντίστροφη $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

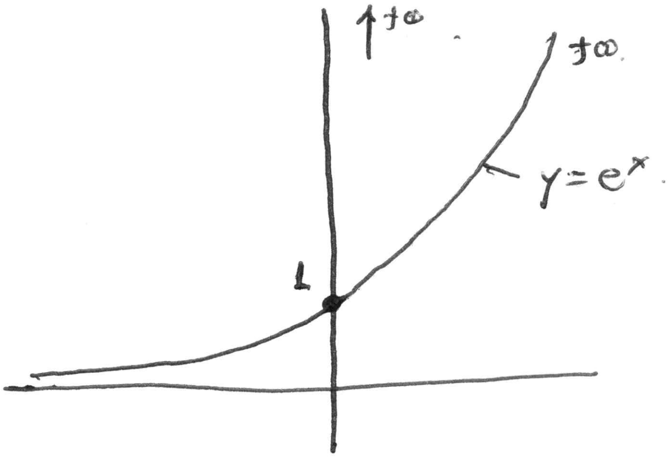
Πράγματι, αν $y = f(x) = x^2$, τότε $x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$.

Άρα έχουμε: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} =$

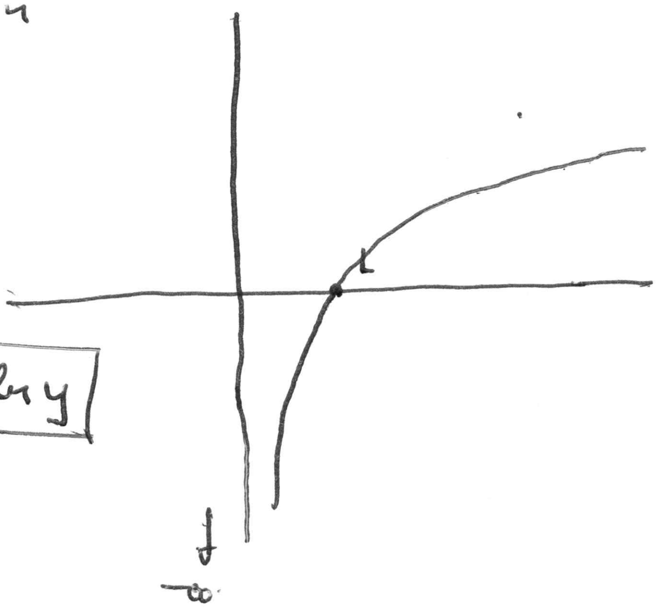
$\overset{}{\underset{x=\sqrt{y}}{=\!=}} \frac{1}{2\sqrt{y}}$, δηλαδή $(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Στο μηδέν έχουμε πρόβλημα. (γιατί;)

2). $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad f: \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$



Αντίστροφη
$g(y) = \ln y$
$y \in (0, +\infty)$



$$\boxed{y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y}$$

Τότε $(\ln y)' = \dfrac{1}{(e^x)'} = \dfrac{1}{e^x} \underset{e^x = y}{=} \dfrac{1}{y}$.

Άρα $(\ln y)' = \dfrac{1}{y}$ για κάθε $y \in (0, +\infty)$

Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή συνήθως συμβολίζεται με x αντί y, συνήθως γράφουμε

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0}$$

Έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Προσοχή! ~~Εδώ~~ δεν εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας ~~γιατί~~ στο απόλυτο $|x|$ που δεν παραγωγίζεται στο μηδέν (εκτός πεδίου ορισμού)

Αν $x<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$, τότε $|x| = -x > 0$.

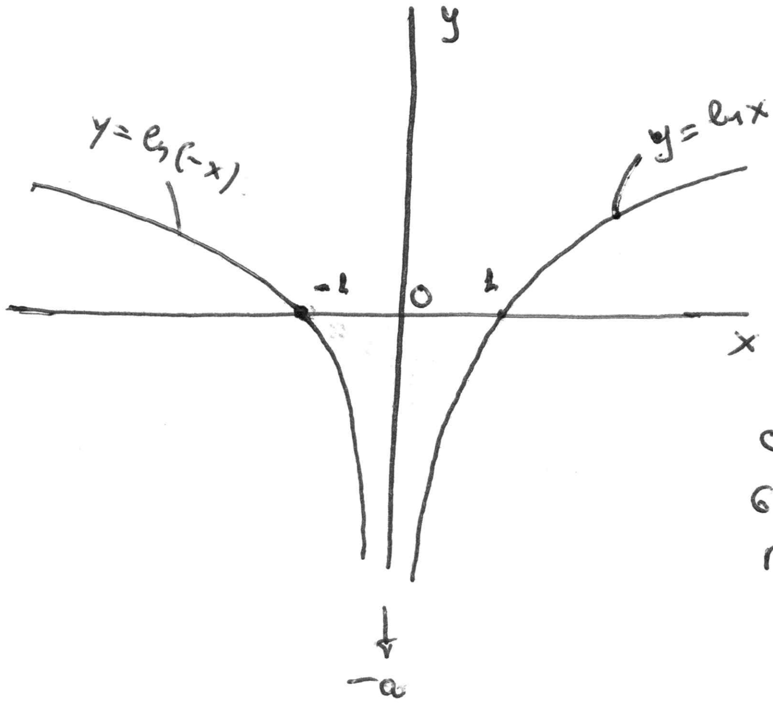
Ο κανόνας της αλυσίδας θα εφαρμοστεί στο $-x$.

Έστω $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln|x| = \ln(-x)$.

Τότε $g'(x) = (\ln(-x))' \underset{-x>0}{=} \frac{1}{-x} \cdot (-x)' =$

$= -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Αν $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln|x|$ τότε



Η γραφική παράσταση αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς τον άξονα $y'y$. (Άρτια συνάρτηση)

Ειδικές τεχνικές παραγώγισης

1) $f(x)=x^{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Γράφουμε $x^{x}=e^{\ln(x^{x})}$.

Άρα $(x^{x})'=\left(e^{\ln(x^{x})}\right)'\underset{\uparrow}{=}e^{\ln(x^{x})}(\ln(x^{x}))'=$

κανόνας αλυσίδας

$=x^{x}(x\ln x)'=x^{x}((x)'\ln x+x(\ln x)')=$

$=x^{x}\left(\ln x+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)=x^{x}(\ln x+1)$.

2) $g(x)=(\sin x)^{\tan x}$

Τότε $g'(x)=\left[e^{\ln[(\sin x)^{\tan x}]}\right]'=$

$=e^{\ln[(\sin x)^{\tan x}]}\left(\ln((\sin x)^{\tan x})\right)'=$

$=(\sin x)^{\tan x}(\tan x\ln(\sin x))'=$

$=(\sin x)^{\tan x}\left((\tan x)'\ln(\sin x)+\tan x(\ln(\sin x))'\right)=$

$=(\sin x)^{\tan x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x)+\tan x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right)=$

$=(\sin x)^{\tan x}\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}}\cdot\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}}\right)=$

$=(\sin x)^{\tan x}\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+1\right)$