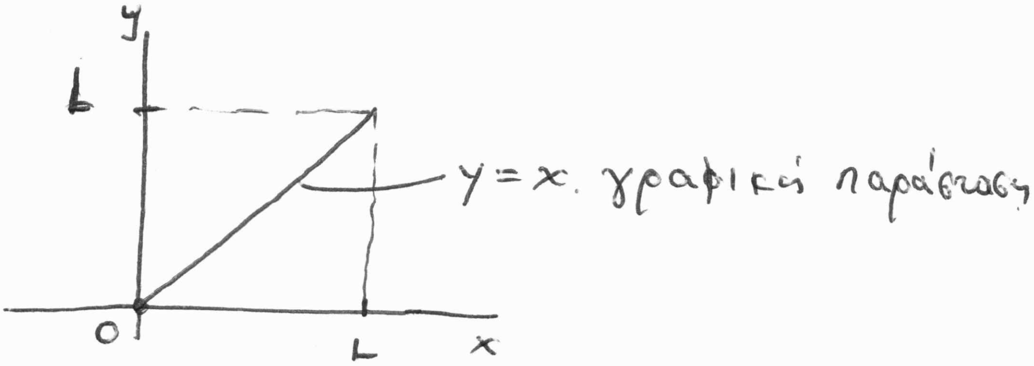
Σημείωση – Διόρθωση!

Στο προηγούμενο μάθημα είχαμε πει ότι αν μια συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0\in\Delta$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό τότε $f'(x_0)=0$. (Fermat).

<u>Το σωστό είναι ότι το x_0 πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του Δ (όχι άκρο).</u>

Παράδειγμα: $f:[0,1]\to[0,1]$ με $f(x)=x$ $\forall x\in[0,1]$



Στο $x_0=0$ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο.
Αλλά η παράγωγος εδώ είναι πλευρική.

$$\frac{d}{dx}f(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1\neq 0,$$ γιατί δεν ορίζεται η συνάρτηση για $x<0$.

Ομοίως $\frac{df}{dx}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1\neq 0$, και στο $x_0=1$ παρουσιάζει ολικό <u>μέγιστο</u>.

<u>Άλλες εφαρμογές των παραγώγων:</u>

1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\cos x = x-2$$

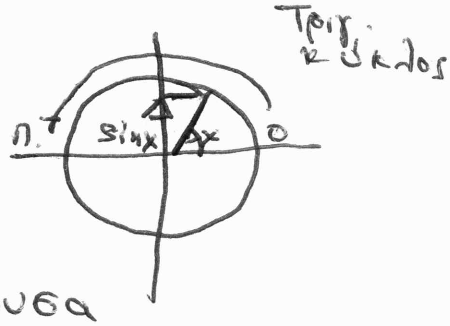
έχει ακριβώς μία λύση στο $[0,\pi]$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\cos x - x + 2$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Η f είναι προφανώς συνεχής.

Τώρα, $\forall x\in(0,\pi)$ έχουμε:

$$f'(x) = -\sin x - 1.$$

και $\sin x>0 \ \forall x\in(0,\pi)$.



Άρα $f'(x)<0 \ \forall x\in(0,\pi)$.

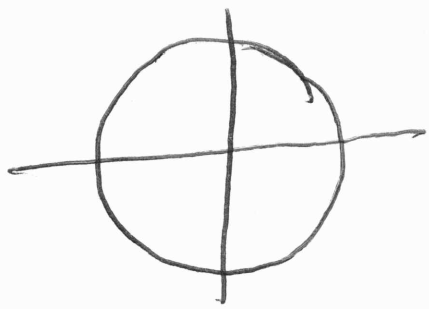
Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. $f(0)=\cos 0 - 0 + 2 = 1+2=3>0$ και $f(\pi)=\cos\pi - \pi + 2 = -\pi+3<0$ γιατί $\pi\cong 3,14159\ldots>3$.

Από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η f έχει ρίζα στο $[0,\pi]$ και επειδή $f\downarrow$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

<u>Απόδειξη:</u>

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot x - \sin x}{x^2}$$



για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Ο παρονομαστής θετικός, άρα πρέπει να ελέγξω το πρόσημο του αριθμητή.

Επειδή $\cos x>0$ και $\sin x>0 \ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$x\cos x - \sin x = \cos x\left(x-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\cos x\,(x-\tan x)$$

Επειδή $\cos x>0$, αρκεί να ελέγξω το πρόσημο του $g(x)=x-\tan x$.

Έχουμε $g'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}<0$, γιατί

$0 < \cos x < 1 \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Άρα $g \downarrow$ στο $[0, \frac{\pi}{2})$ (στο 0 ορίζεται και $g(0) =$
$= 0 - \tan 0 = 0$.

Άρα $g(x) < 0 \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x - \tan x < 0 \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$
$\Leftrightarrow \cos x (x - \tan x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$
$\Rightarrow f \downarrow (0, \frac{\pi}{2})$

3) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x \ln x$ και $h(x) =$
$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

<u>Απόδειξη:</u> Το κοινό πεδίο ορισμού των g και h είναι το $(0, +\infty)$

Παίρνουμε τη διαφορά $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με
$G(x) = g(x) - h(x) = x \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.

Έχουμε: $G'(x) = \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + x - 2 =$
$= \ln x + x - 1$.

Η δεύτερη παράγωγος $G''(x)$ ισούται με
$G''(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \ \forall x \in (0, +\infty)$.

Άρα $G' \uparrow (0, +\infty)$ και $G'(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$.

Άρα $G'(x) < 0 \ \forall x \in (0, 1)$ και $G'(x) > 0 \ \forall x \in (1, +\infty)$

Άρα $G \downarrow (0, 1]$ και $G \uparrow [1, +\infty)$.

Τό $x = 1$ είναι θέση ολικού ελαχίστου της G.

$G(1) = \cancel{1 \cdot \ln 1} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} = 0$.

Άρα $g(x)=h(x) \Leftrightarrow x=1$. Επίσης $g(1)=h(1)=0$.

Τώρα, $g'(x) = \ln x + 1$ και $g'(1) = \ln 1 + 1 = 1$,

$h'(x) = -x+2$ και $h'(1) = -1+2 = 1$.

Άρα οι εφαπτόμενες στο $(1,0)$ έχουν την ίδια κλίση ~~και επειδή~~ άρα παράλληλες και επειδή περνούν από το ίδιο σημείο ταυτίζονται.

Το κριτήριο της $2^{ης}$ παραγώγου

Αν η f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και υπάρχουν οι f' και f'' σε κάθε σημείο του (α,β) και επίσης υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε.

α) $f'(x_0)=0$ και β) $f''(x_0)<0$, τότε το x_0 είναι θέση τοπικού μεγίστου.

Αν α) $f'(x_0)=0$ και β) $f''(x_0)>0$, τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

Παραδείγματα: 1) $f(x)=x^2-6x+5$. Εδώ $(\alpha,\beta)=(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

$f'(x)=2x-6$. Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

$f''(x)=2>0$. Άρα στο $x=3$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$. Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3 = x(x-3)+(x-3) = (x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x=-1 \text{ ή } x=3)$$

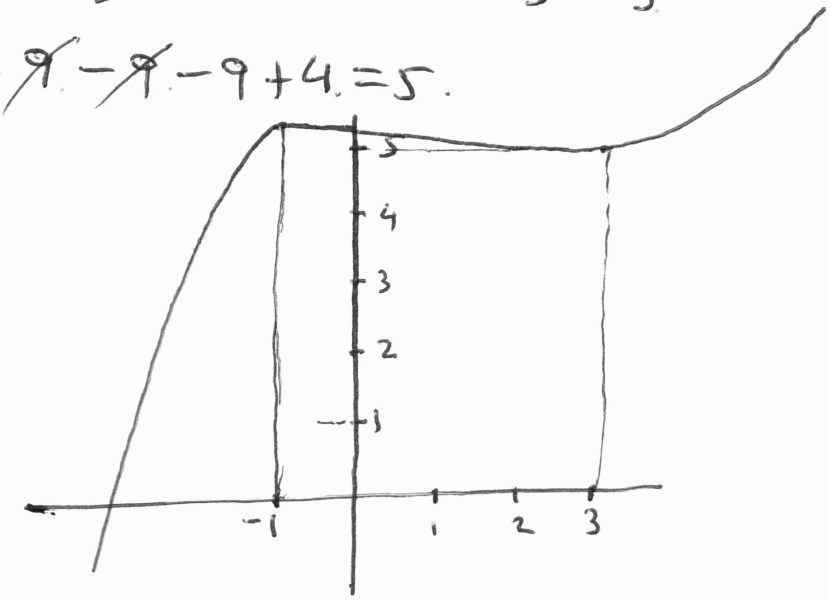
$$f''(x)=2x-2=2(x-1)$$

$f''(-1)=2(-1-1)=-4<0$. Άρα η f παρουσιάζει στο $x=-1$ τοπικό μέγιστο.

$f''(3)=2(3-1)=2>0$. Άρα η f παρουσιάζει στο $x=3$ τοπικό ελάχιστο.

$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+4=6-\frac{1}{3}=\frac{17}{3}>5$.

$f(3)=\cancel{9}-\cancel{9}-9+4=5$.



3) Βρείτε (αν υπάρχουν) οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης $G(p)=\frac{1}{p(1-p)}$, όπου $p\in(0,1)$

<u>Λύση</u>: $\lim_{p\to 0^+} G(p)=\lim_{p\to 0^+}\frac{1}{p}\lim_{p\to 0^+}\frac{1}{1-p}=(+\infty)\cdot 1=$
$=+\infty$. Άρα η G δεν έχει μέγιστη τιμή.

(Ομοίως $\lim_{p\to 1^-} G(p)=\lim_{p\to 1^-}\frac{1}{p}\lim_{p\to 1^-}\frac{1}{1-p}=1\cdot(+\infty)=$
$=+\infty$).

$$G'(p)=\left(\frac{1}{p-p^2}\right)'=-\frac{1-2p}{(p-p^2)^2}=\frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}.$$

$G'(p)=0 \Leftrightarrow 2p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$.

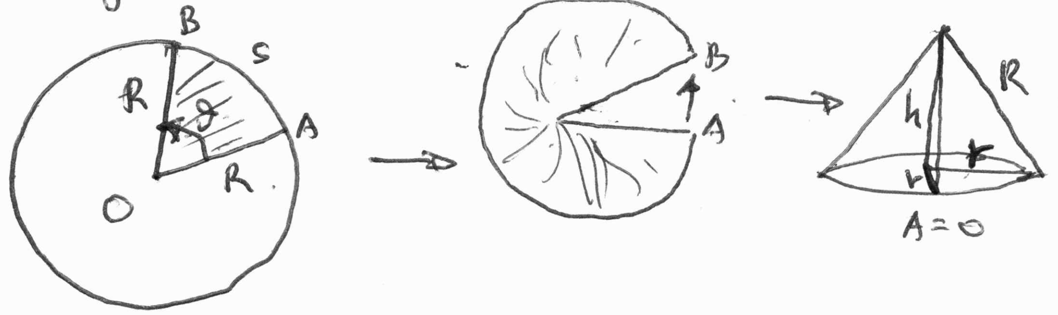
$G'(p)<0 \Leftrightarrow 2p<1 \Leftrightarrow p\in(0,\frac{1}{2})$.

Άρα $G\downarrow(0,\frac{1}{2}]$ και $G'(p)>0 \Leftrightarrow 2p>1 \Leftrightarrow p\in(\frac{1}{2},1)$

Άρα $G\nearrow [\frac{1}{2}, L)$. Στο σημείο $p=\frac{1}{2}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

4). <u>Πρακτικό πρόβλημα:</u>

Από έναν κύκλο ακτίνας R κόβουμε έναν κυκλικό τομέα γωνίας ϑ. (σε ακτίνια)



Ενώνουμε τα άκρα A και B του χαρτιού και σχηματίζεται ορθός κυκλικός κώνος ύψους h με παράπλευρη ακτίνα R.

Για ποιά τιμή του ϑ ο κώνος έχει τον μέγιστο όγκο; (Όγκος κώνου $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, $r=$ακτίνα βάσης και h το ύψος)

<u>Λύση:</u> Το τόξο s που αφαιρούμε ισούται με $s=R\vartheta$. Από την αρχική περιφέρεια $2\pi R$ του κύκλου απομένει $2\pi R - R\vartheta$. Αυτή είναι η περιφέρεια της βάσης του κώνου. Άρα η ακτίνα της βάσης του κώνου $r=\dfrac{2\pi R - R\vartheta}{2\pi}$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι

$$h^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{R^2(2\pi-\vartheta)^2}{4\pi^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h = R\sqrt{1-\frac{(2\pi-\vartheta)^2}{4\pi^2}}.$$

Άρα ο όγκος του κώνου είναι $V(\vartheta)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2(2\pi-\vartheta)^2}{4\pi^2}\cdot$

$$\cdot R\sqrt{1-\frac{(2\pi-\vartheta)^2}{4\pi^2}} = \frac{R^3}{12\pi}(2\pi-\vartheta)^2\sqrt{1-\frac{(2\pi-\vartheta)^2}{4\pi^2}}, \quad \vartheta\in(0,2\pi).$$

Η μέγιστη τιμή του V θα επιτευχθεί όταν το

$$(2\pi-\theta)^2\sqrt{1-\frac{(2\pi-\theta)^2}{4\pi^2}},\ \theta\in(0,2\pi)$$ γίνει μέγιστο.

Παρατηρούμε ότι $0<\theta<2\pi \Leftrightarrow 0<2\pi-\theta<2\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0<(2\pi-\theta)^2<4\pi^2$. Χάριν απλότητος, θέτουμε

$$u=(2\pi-\theta)^2\in(0,4\pi^2)$$

και ψάχνουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(u)=u\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}},\ u\in(0,4\pi^2).$$

$$f'(u)=\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}}+u\cdot\frac{-\frac{1}{4\pi^2}}{2\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}}}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}}-\frac{u}{8\pi^2\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}}}=$$

$$=\frac{8\pi^2\left(1-\frac{u}{4\pi^2}\right)-u}{8\pi^2\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}}}=\frac{8\pi^2-2u-u}{8\pi^2\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}}}=$$

$$=\frac{8\pi^2-3u}{8\pi^2\sqrt{1-\frac{u}{4\pi^2}}}$$

$f'(u)=0 \Leftrightarrow 3u=8\pi^2 \Leftrightarrow u=\frac{8\pi^2}{3}$.

$f'(u)>0 \Leftrightarrow 3u<8\pi^2 \Leftrightarrow 0<u<\frac{8\pi^2}{3}$ και

$f'(u)<0 \Leftrightarrow 3u>8\pi^2 \Leftrightarrow \frac{8\pi^2}{3}<u<4\pi^2$.

Άρα $f\nearrow\left(0,\frac{8\pi^2}{3}\right]$, $f\searrow\left[\frac{8\pi^2}{3},4\pi^2\right)$ και στο $u=\frac{8\pi^2}{3}$ παρουσιάζει μέγιστο.

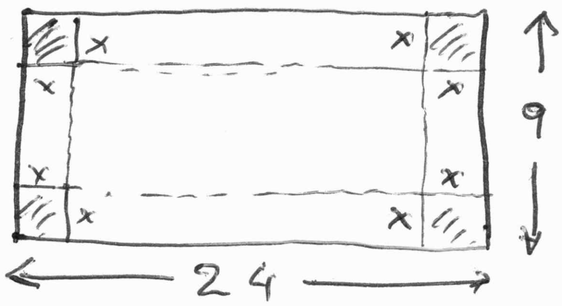
Αλλά $u=(2\pi-\theta)^2=\frac{8\pi^2}{3} \Leftrightarrow 2\pi-\theta=\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\pi-\theta=\frac{2\sqrt{6}\,\pi}{3} \Rightarrow \theta=2\pi-\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}=\frac{6\pi-2\sqrt{6}\pi}{3}=$$

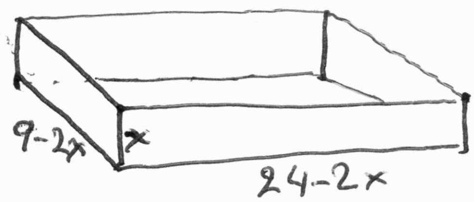
$$=\boxed{\frac{\sqrt{6}\pi(\sqrt{6}-2)}{3}}$$

(Πράγματι $\frac{\sqrt{6}\pi}{3}(\sqrt{6}-2)<2\pi \Leftrightarrow \sqrt{6}(\sqrt{6}-2)<6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{6}-2<\sqrt{6} \Leftrightarrow -2<0$ } και $\sqrt{6}-2>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{6}>2 \Leftrightarrow 6>4$).

5) <u>Πρόβλημα:</u> Έχουμε ένα ορθογώνιο μήκους 24cm και πλάτους 9cm.
Από κάθε γωνία κόβουμε ένα τετράγωνο πλευράς x.



" Τσακίζουμε τις ακμές και φτιάχνουμε ένα (ανοικτό πάνω) κουτί (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο).



Για ποιά τιμή του x το κουτί έχει τον μεγαλύτερο όγκο;

Ο όγκος V του κουτιού είναι:

$$V(x) = x(9-2x)(24-2x), \quad x \in \left(0, \frac{9}{2}\right)$$

πρέπει $9-2x>0$.

$$V'(x) = (9-2x)(24-2x) - 2x(24-2x) - 2x(9-2x) =$$

$$\cancel{= 216x - 66x^2 + 4x^3}$$

$$= (216 - 18x - 48x + 4x^2) - 2x(24-2x+9-2x) =$$

$$= (216 - 66x + 4x^2) - 2x(33-4x) =$$

$$= 216 - 66x + 4x^2 - 66x + 8x^2 =$$

$$= 12x^2 - 132x + 216 = 12(x^2 - 11x + 18) =$$

$$= 12(x^2 - 2x - 9x + 18) = 12(x(x-2) - 9(x-2)) =$$

$$= 12(x-9)(x-2)$$

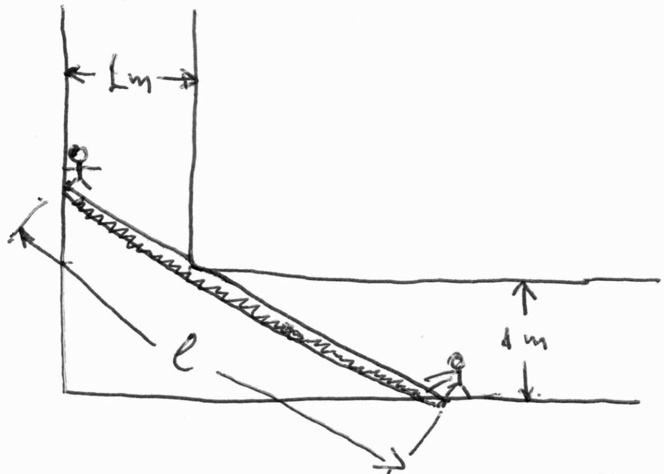
x	$-\infty$	0		2		$\frac{9}{2}$		9		$+\infty$
$V'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
V			$\nearrow$		$\searrow$					
				ολικό μέγιστο						

Άρα ο όγκος V γίνεται μέγιστος όταν $x=2$.

Τότε $V(2) = 2(9-4)(24-4) = 10 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^3$.

6) <u>Το πρόβλημα της σανίδας</u>

Δύο εργάτες προσπαθούν να γυρίσουν μια σανίδα μήκους ℓ σε μια ορθή γωνία ενός διαδρόμου, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα!

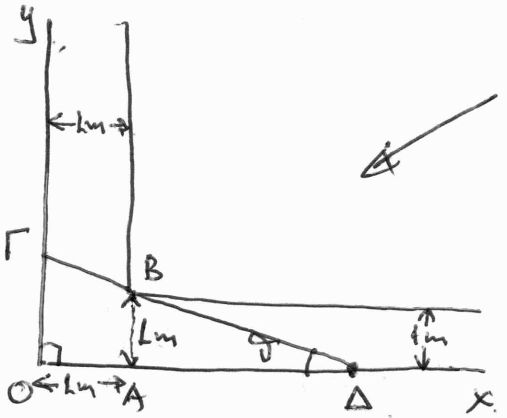


Για να το πετύχουν "γλυστράνε" στην άκρη του διαδρόμου. Ποιο είναι το μέγιστο μήκος l της σανίδας, ώστε να την γυρίσουν χωρίς να σπάσει;

<u>Λύση</u>

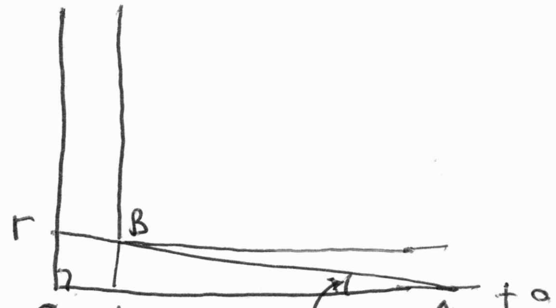
Έστω ϑ η γωνία που σχηματίζει η σανίδα με τον άξονα των x στο σημείο Δ.

Όταν ο εργάτης Δ πάει στο $+\infty$ το μήκος $\Gamma\Delta$ της σανίδας πάει και αυτό στο $+\infty$ και η γωνία ϑ πάει στο 0.

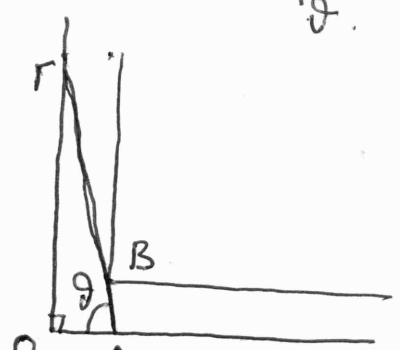


Σχήμα 1

Όταν ο εργάτης Δ πάει στο A το μήκος της σανίδας πάει πάλι στο $+\infty$ και η γωνία ϑ τείνει στο $\frac{\pi}{2}=90^\circ$



Από το <u>σχήμα 1</u> έχουμε ότι τα τρίγωνα $O\Gamma\Delta$ και $AB\Delta$ είναι όμοια.



$\sin\theta = \frac{AB}{B\Delta} = \frac{1}{B\Delta} \Rightarrow B\Delta = \frac{1}{\sin\theta}$

$A\Delta^2 = B\Delta^2 - AB^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1 = \frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta.$

Επειδή $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cot\theta > 0$.

Άρα $\boxed{A\Delta = \cot\theta}$

$\cos\theta = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{O\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{1+A\Delta}{\ell} = \frac{1+\cot\theta}{\ell} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta} = \frac{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \ell(\theta)$

Άρα $\ell(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$\ell'(\theta) = -\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} =$

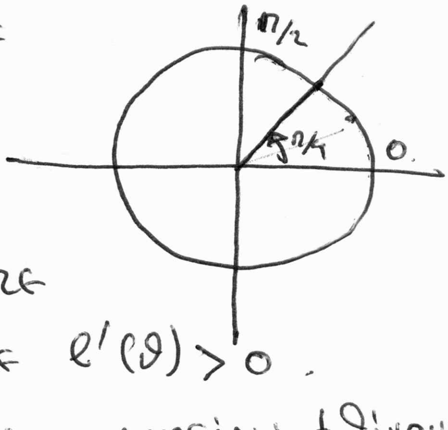
$= \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} = \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)}{\cos^2\theta\sin^2\theta}.$

Τώρα για κάθε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos\theta, \sin\theta > 0$ και άρα

$\ell'(\theta) = (\sin\theta - \cos\theta)\,\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$ με $\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} > 0$.

Αν $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$, τότε $\cos\theta > \sin\theta$, οπότε $\ell'(\theta) < 0$.



Αν $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, τότε $\sin\theta > \cos\theta$, οπότε $\ell'(\theta) > 0$.

Άρα η $\ell(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{\pi}{4}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Η ελάχιστη τιμή του ℓ δίνεται από τη γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Η τιμή αυτή ισούται με:

$$\ell\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=$$

$=2\sqrt{2}$ είναι η ελάχιστη τιμή του ℓ και η λύση του προβλήματος.

<u>Παρατήρηση:</u> Όταν αναζητούμε ακρότατα, αυτά τα αναζητούμε

Κρίσιμα σημεία { 1) Στα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος
2) Στα σημεία όπου δεν υπάρχει παράγωγος.
3) Στα άκρα του διαστήματος.

Τα σημεία των περιπτώσεων 1) και 2) λέγονται <u>κρίσιμα σημεία</u>.

<u>Παράδειγμα</u> 7) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$H(x)=|x^2-1|\ ,\ x\in[-2,2].$$

<u>Λύση:</u> Παρατηρούμε ότι $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1$
$\Leftrightarrow (x\leq -1$ ή $x\geq 1)$ και $x^2-1<0 \Leftrightarrow -1<x<1$

Άρα $H(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1, & \text{αν } x\in[-2,-1]\\ 1-x^2, & \text{αν } x\in[-1,1]\\ x^2-1, & \text{αν } x\in[1,2]\end{cases}$

Στα σημεία ± 1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε από τους τύπους x^2-1 ή $1-x^2$ και να πάρουμε μηδέν, αφού η H είναι συνεχής.

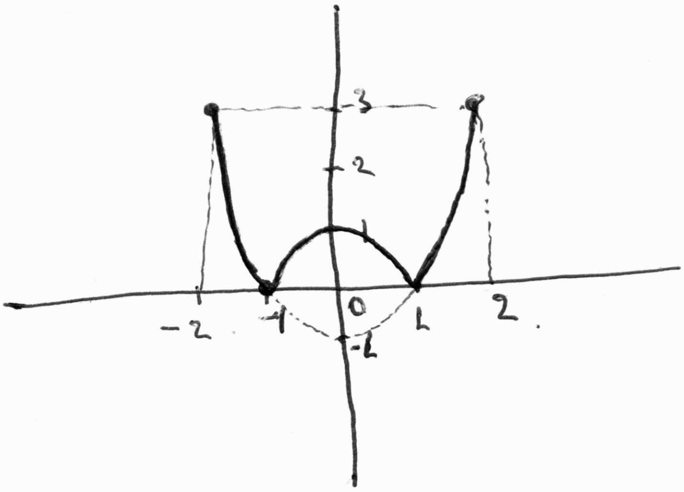
Τώρα α) $x\in[-2,-1)$: $H'(x)=(x^2-1)'=2x<0$.
Άρα $H\downarrow[-2,-1]$.

β) $x\in(-1,1)$. Τότε $H'(x)=-2x$. Τότε $H'(x)>0$ αν $x\in(-1,0)$ και $H'(x)<0$ αν $x\in(0,1)$.
Άρα $H\uparrow[-1,0]$ και $H\downarrow[0,1]$

γ) $x \in (1,2)$. Τότε $H'(x) = 2x > 0$ και άρα $H \nearrow [1,2]$

Έχουμε τον πίνακα.

x	-2		-1		0		1		2
$H'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
H		↘		↗		↘		↗	
	Τ.μ.		Τ.Ε.		Τ.μ.		Τ.Ε.		Τ.μ.



Στα άκρα ± 2 η H έχει ολικά μέγιστα $H(\pm 2) = 3$

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα -1, 1 όπου δεν υπάρχει παράγωγος και είναι θέσεις ολικού ελαχίστου $H(\pm 1) = 0$ και το 0 στο οποίο υπάρχει παράγωγος (μηδενική) και είναι θέση τοπικού μεγίστου.

(Αν $x \in (-2,-1)$ τότε $H(x) = x^2 - 1$ και άρα $\lim_{x \to -1^-} \frac{H(x) - H(-1)}{x+1} =$

$= \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} (x-1) = -2$. και αν $x \in (-1,0)$,

τότε $H(x) = 1 - x^2$ και άρα $\lim_{x \to -1^+} \frac{H(x) - H(-1)}{x+1} =$

$= \lim_{x \to -1^+} \frac{1 - x^2}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} (1-x) = 1 - (-1) = 2$.

Άρα $\nexists\, H'(-1)$. Ομοίως $\nexists\, H'(1)$)

Concepts Review

1. If f is continuous at c, $f'(x) > 0$ near to c on the left, and $f'(x) < 0$ near to c on the right, then $f(c)$ is a local _____ value for f.

2. If $f'(x) = (x + 2)(x - 1)$, then $f(-2)$ is a local _____ value for f and $f(1)$ is a local _____ value for f.

3. If $f'(c) = 0$ and $f''(c) < 0$, we expect to find a local _____ value for f at c.

4. If $f(x) = x^3$, then $f(0)$ is neither a _____ nor a _____, even though $f''(0) =$ _____.

Problem Set 3.3

In Problems 1–10, identify the critical points. Then use (a) the First Derivative Test and (if possible) (b) the Second Derivative Test to decide which of the critical points give a local maximum and which give a local minimum.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

2. $f(x) = x^3 - 12x + \pi$

3. $f(\theta) = \sin 2\theta, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x, 0 < x < 2\pi$

5. $\Psi(\theta) = \sin^2\theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$

6. $r(z) = z^4 + 4$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

8. $g(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^2}$

9. $h(y) = y^2 - \dfrac{1}{y}$

10. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$

In Problems 11–20, find the critical points and use the test of your choice to decide which critical points give a local maximum value and which give a local minimum value. What are these local maximum and minimum values?

11. $f(x) = x^3 - 3x$

12. $g(x) = x^4 + x^2 + 3$

13. $H(x) = x^4 - 2x^3$

14. $f(x) = (x - 2)^5$

15. $g(t) = \pi - (t - 2)^{2/3}$

16. $r(s) = 3s + s^{2/5}$

17. $f(t) = t - \dfrac{1}{t}, t \neq 0$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

19. $\Lambda(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}, 0 < \theta < 2\pi$

20. $g(\theta) = |\sin\theta|, 0 < \theta < 2\pi$

In Problems 21–30, find, if possible, the (global) maximum and minimum values of the given function on the indicated interval.

21. $f(x) = \sin^2 2x$ on $[0, 2]$

22. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ on $[0, \infty)$

23. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 32}$ on $[0, \infty)$

24. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ on $[0, \infty)$

25. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ on $[0, 4]$

26. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ on $[0, \infty)$

27. $f(x) = \dfrac{64}{\sin x} + \dfrac{27}{\cos x}$ on $(0, \pi/2)$

28. $g(x) = x^2 + \dfrac{16x^2}{(8 - x)^2}$ on $(8, \infty)$

29. $H(x) = |x^2 - 1|$ on $[-2, 2]$

30. $h(t) = \sin t^2$ on $[0, \pi]$

In Problems 31–36, the first derivative f' is given. Find all values of x that make the function f (a) a local minimum and (b) a local maximum.

31. $f'(x) = x^3(1 - x)^2$

32. $f'(x) = -(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

33. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)(x - 4)$

34. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)^2(x - 4)^2$

35. $f'(x) = (x - A)^2(x - B)^2, A \neq B$

36. $f'(x) = x(x - A)(x - B), 0 < A < B$

In Problems 37–42, sketch a graph of a function with the given properties. If it is impossible to graph such a function, then indicate this and justify your answer.

37. f is differentiable, has domain $[0, 6]$, and has two local maxima and two local minima on $(0, 6)$.

38. f is differentiable, has domain $[0, 6]$, and has three local maxima and two local minima on $(0, 6)$.

39. f is continuous, but not necessarily differentiable, has domain $[0, 6]$, and has one local minimum and one local maximum on $(0, 6)$.

40. f is continuous, but not necessarily differentiable, has domain $[0, 6]$, and has one local minimum and no local maximum on $(0, 6)$.

41. f has domain $[0, 6]$, but is not necessarily continuous, and has three local maxima and no local minimum on $(0, 6)$.

42. f has domain $[0, 6]$, but is not necessarily continuous, and has two local maxima and no local minimum on $(0, 6)$.

43. Consider $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ with $A > 0$. Show that $f(x) \geq 0$ for all x if and only if $B^2 - 4AC \leq 0$.

44. Consider $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ with $A > 0$. Show that f has one local maximum and one local minimum if and only if $B^2 - 3AC > 0$.

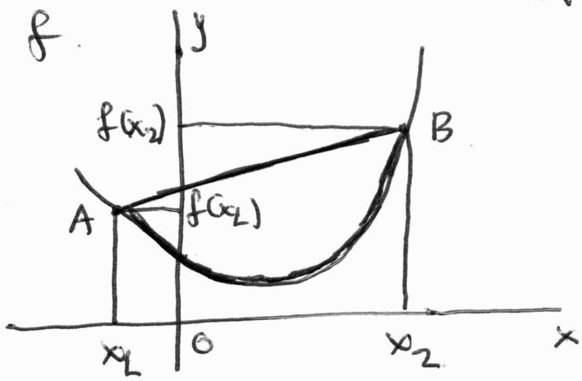
45. What conclusions can you draw about f from the information that $f'(c) = f''(c) = 0$ and $f'''(c) > 0$?

Answers to Concepts Review: **1.** maximum **2.** maximum; minimum **3.** maximum **4.** local maximum; local minimum; 0

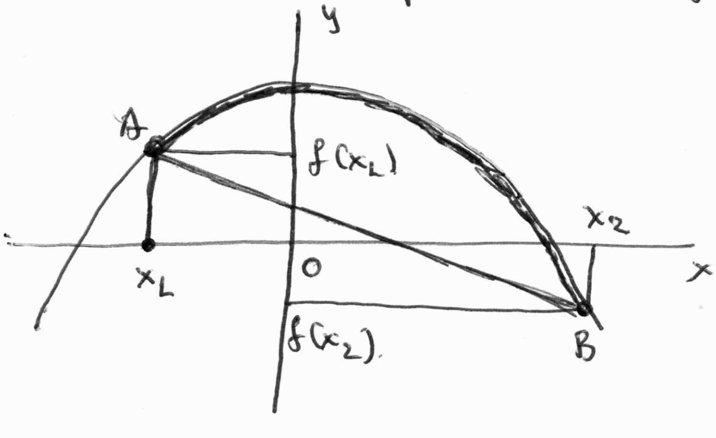
Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Έστω $f:\Delta \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου Δ διάστημα του $\mathbb{R}$

α) Η f λέγεται <u>κυρτή</u> στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ η χορδή που ενώνει τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται <u>πάνω</u> από το αντίστοιχο τόξο της γραφικής παράστασης C_f της f.



β) Η f λέγεται <u>κοίλη</u> στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ η χορδή που ενώνει τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται <u>κάτω</u> από το αντίστοιχο τόξο της γραφικής παράστασης C_f της f.



<u>Αποδεικνύονται τα εξής:</u>

1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και η f' είναι <u>γνησίως αύξουσα</u>, τότε η f είναι <u>κυρτή</u> στο Δ.

2) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και η f' είναι <u>γνησίως φθίνουσα</u>, τότε η f είναι <u>κοίλη</u> στο Δ.

$f' \uparrow$ κυρτή συνάρτηση

$f' \downarrow$ κοίλη συνάρτηση

<u>Πόρισμα:</u> 1) Αν η f'' ορίζεται για κάθε x στο εσωτερικό του Δ και $f''(x)>0$, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

2) Αν η f'' ορίζεται για κάθε x στο εσωτερικό του Δ και $f''(x)<0$, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

<u>Απόδειξη:</u> 1) Εφόσον $f''(x)>0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του Δ, τότε $f' \uparrow$ στο εσωτερικό $\Delta \Rightarrow f$ κυρτή στο Δ.

2) Αν $f''(x)<0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του Δ, τότε $f' \downarrow$ στο εσωτερικό του $\Delta \Rightarrow f$ κοίλη στο Δ.

<u>Παρατήρηση:</u> Η f μπορεί να είναι άλλοτε κυρτή και άλλοτε κοίλη σε <u>υποδιαστήματα</u> του Δ.

Αν η f ορίζεται σε ένα διάστημα $(α, β)$ και $x_0 \in (α, β)$ με τις εξής ιδιότητες:

1) f κυρτή στο $(α, x_0]$ και κοίλη στο $[x_0, β)$ και f συνεχής στο x_0. ή

2) f κοίλη στο $(α, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, β)$ και f συνεχής στο x_0,

Τότε το $x = x_0$ είναι <u>θέση σημείου καμπής</u> και το σημείο $(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της f. (ή της γραφικής της παράστασης)

<u>Παραδείγματα: 1)</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

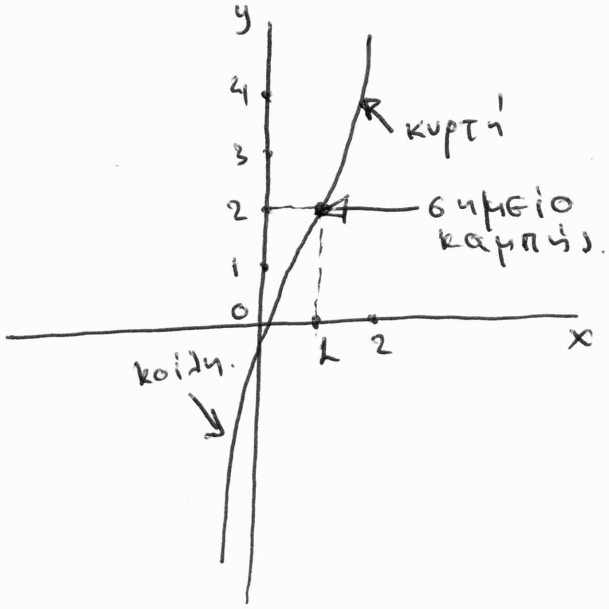
Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ και

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

Άρα $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f' \downarrow (-\infty, 1) \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty, 1]$.

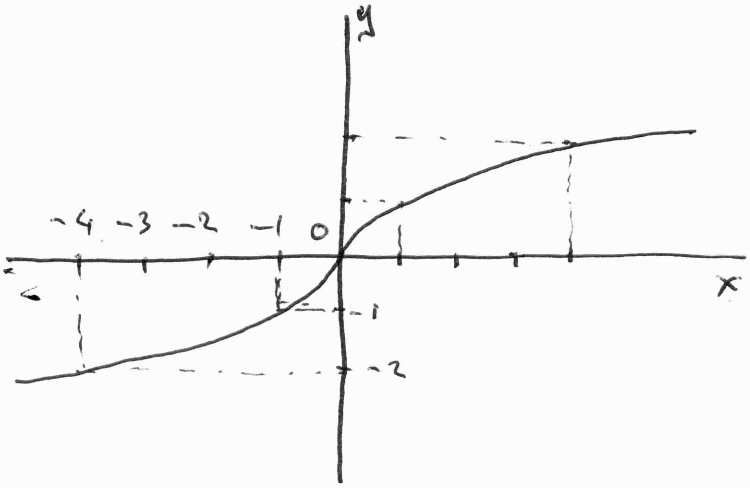
$f''(x) > 0 \;\; \forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f' \uparrow (1, +\infty) \Rightarrow f$ κυρτή στο $[1, +\infty)$

Το σημείο $(1, f(1)) = (1, 2)$ είναι σημείο καμπής της f.



2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$



Η f είναι συνεχής στο $x=0$. Η f είναι επίσης περιττή.
Τώρα, για κάθε $x>0$ έχουμε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ που είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$
Αν $x<0$, τότε $f(x)=-\sqrt{-x}$ και $f'(x)=-\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$
και αν $x_1<x_2<0$, τότε $-x_1>-x_2>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{-x_1}>\sqrt{-x_2}>0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{-x_1}}<\dfrac{1}{\sqrt{-x_2}} \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{-x_1}}<\dfrac{1}{2\sqrt{-x_2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$, δηλαδή $f' \uparrow (-\infty,0)$.
Άρα f <u>κυρτή</u> στο $(-\infty,0]$.
Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο καμπής της f.
Στο $x=0$ δεν ορίζεται παράγωγος.
Πράγματι, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$
και $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{-x}=$
$\displaystyle\underset{u=-x\to 0^+}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{u}}{u}=\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{u}}=+\infty.$
Το $+\infty$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Όταν όμως $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ ή $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$

λέμε ότι η κατακόρυφη ευθεία

$x=a$.

είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

Πόρισμα! Αν η f παραγωγίζεται δύο φορές στο σημείο x_0 και το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f, τότε $\boxed{f''(x_0)=0}$

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Παραδείγματα: 1) Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

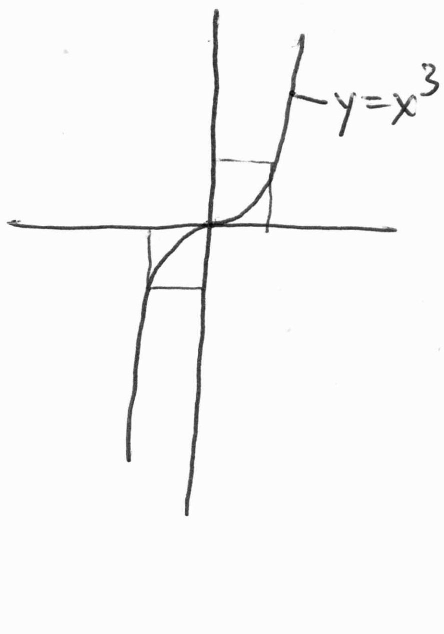
Λύση: Έχουμε $f'(x)=3x^2$ και $f''(x)=6x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, για $x\in(-\infty,0)$ έχουμε $f''(x)<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Για $x\in(0,+\infty)$, $f''(x)=6x>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0,+\infty)$. Επίσης $f''(0)=0$. Το $(0,0)$ είναι σημείο καμπής της f.

Έχουμε το ακόλουθο πινακάκι.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	κοίλη	σ.κ.	κυρτή



2) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και την κυρτότητα η συνάρτηση

$$f(x)=x^4-6x^2+5, \quad x\in\mathbb{R}$$

Λύση: $f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

και $f''(x)=12x^2-12=12(x-1)(x+1)$

Για τη μονοτονία έχουμε το ακόλουθο πινακάκι.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	0	↘	0	↗	
			Τ.Ε		Τ.μ.		Τ.Ε.		

Για την κυρτότητα έχουμε το ακόλουθο πινακάκι

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		∪ κυρτή		∩ κοίλη		∪ κυρτή	
			σ.κ		σ.κ.		

Συνδυασμός και των δύο.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		↘		↗		↗		↘		↘		↗	
			Τ.Ε.		σ.κ.		Τ.μ		σ.κ.		Τ.Ε		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων

i) $f(x)=3x^5-5x^4+2$ ii) $g(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^3}$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=xe^{1-x}$ ii) $g(x)=x^2(2\ln x-5)$

iii) $h(x)=\begin{cases} -3x^2+1 & , \quad x<0 \\ -x^3+3x^2+1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$.

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=e^{-x^2}$ ii) $g(x)=\text{εφ}x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii) $h(x)=x\,|\,x\,|$ iv) $\varphi(x)=\sqrt{|\,x\,|}$

v) $\psi(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x} & , \quad x<0 \\ \sqrt{x} & , \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y=-x^2+2$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(-2,2)$ η συνάρτηση $f(x)=x^4-2\alpha x^3+6x^2+2x+1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων

i) $f(x)=3x^5-5x^4+2$ ii) $g(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^3}$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=xe^{1-x}$ ii) $g(x)=x^2(2\ln x-5)$

iii) $h(x)=\begin{cases}-3x^2+1 & , \quad x<0\\ -x^3+3x^2+1 & , \quad x\geq 0\end{cases}$.

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=e^{-x^2}$ ii) $g(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii) $h(x)=x|x|$ iv) $\varphi(x)=\sqrt{|x|}$

v) $\psi(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & , \quad x<0\\ \sqrt{x} & , \quad x\geq 0\end{cases}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

5. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.