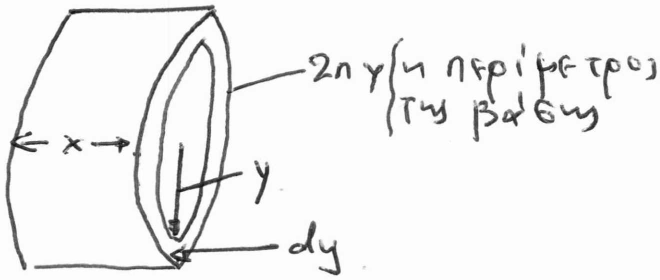
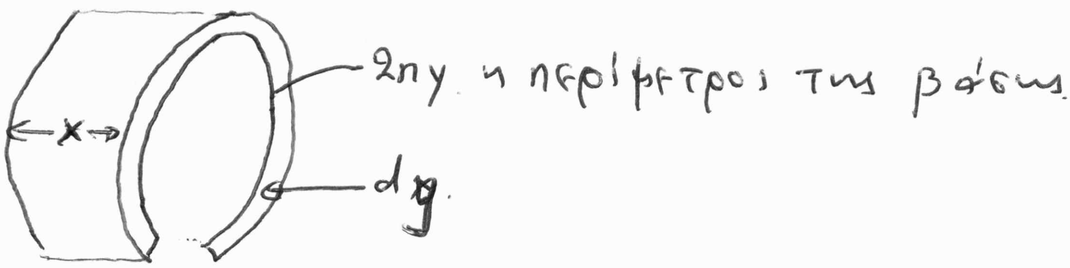
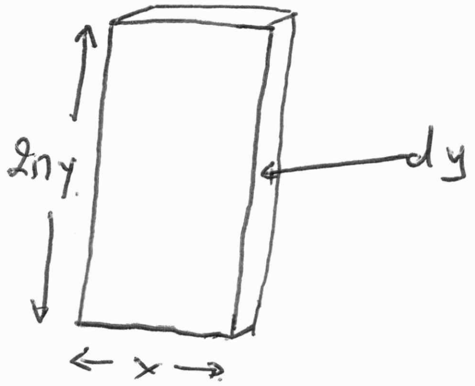
Κέλυφος κυλινδρικό και όγκος αυτού:



Ποιός είναι ο όγκος μιας λεπτής κυλινδρικής "φλούδας" μήκους x, ακτίνας y και πάχους dy;
Κόβουμε τη φλούδα σε ένα σημείο και την απλώνουμε.





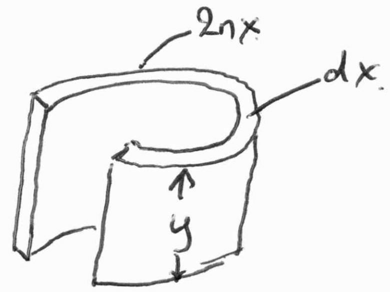
Θα μας δώσει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις x επί $2\pi y$ επί dx.

Ο στοιχειώδης όγκος της φλούδας είναι $\boxed{2\pi y \cdot x \cdot dy} = dV$

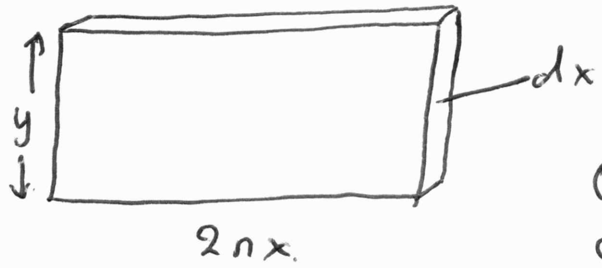
Αν ο κύλινδρος είναι κατακόρυφος

Τότε η ακτίνα είναι x, δηλαδή η περίμετρος βάσης είναι $2\pi x$, Το ύψος είναι y και και το πάχος dx.

Αν την κόψουμε κάθετα θα μας δώσει



ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις

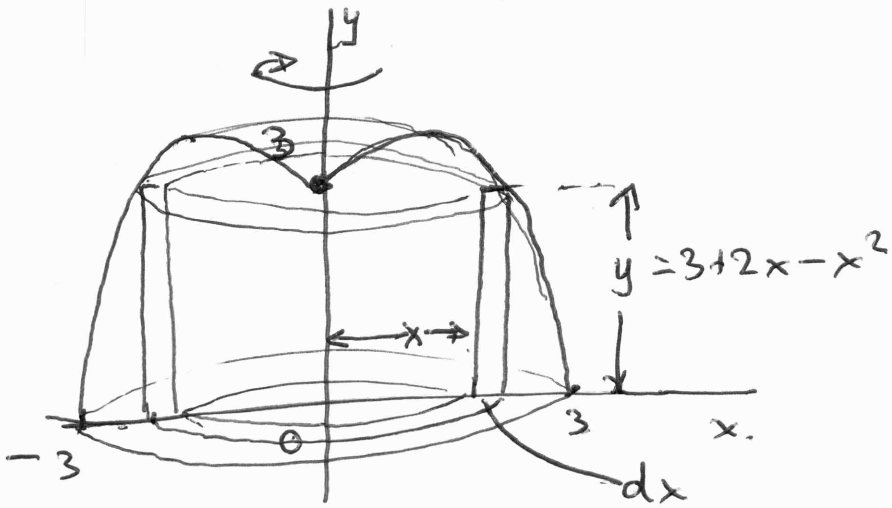


$y, 2\pi x, dx$.

Ο στοιχειώδης όγκος είναι $\boxed{2\pi x \cdot y \cdot dx = dV}$

Αυτό εφαρμόσαμε στα προηγούμενα παίρνοντας κυλινδρικές διατομές (κελύφη – φλούδες).

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο όγκος και το κέντρο μάζας στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $y'y$ του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες και την καμπύλη $y = 3 + 2x - x^2$.



Ο όγκος κάθε κυλινδρικής φλούδας είναι

$$dV = 2\pi x y \, dx = 2\pi x(3 + 2x - x^2)\, dx,$$

όπου $x \in [0, 3]$.

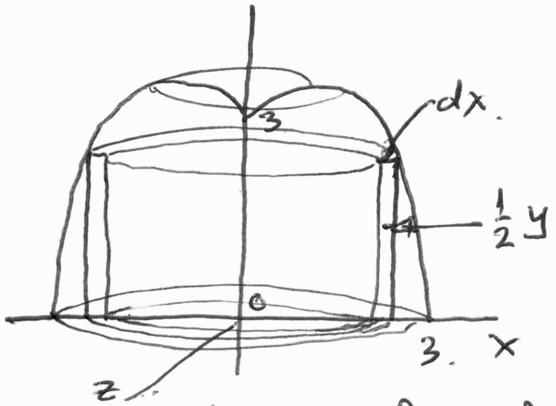
Ο συνολικός όγκος είναι $\int_0^3 2\pi x(3 + 2x - x^2)\, dx =$

$$= 2\pi \int_0^3 (3x+2x^2-x^3)\,dx = 2\pi \left[3\cdot\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^3 =$$

$$= 2\pi\left[\frac{27}{2}+\frac{2\cdot 27}{3}-\frac{81}{4}\right] = 2\cdot 27\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right) =$$

$$= 54\pi \cdot \frac{6+8-9}{12} = \frac{5\cdot 2\cdot 27\pi}{12} = \frac{5\cdot 9\pi}{2} = \frac{45\pi}{2}.$$

Το κέντρο μάζας, λόγω συμμετρίας θα βρίσκεται πάνω στον άξονα των y.



Επειδή το κέντρο μάζας κάθε ορθογωνίου που με περιστροφή παράγει το κυλινδρικό κέλυφος βρίσκεται στη μέση της αποστάσεως από τον άξονα των x, δηλαδή απέχει από το επίπεδο zOx απόσταση $\frac{1}{2}y$, η ροπή ως προς το επίπεδο zOx ισούται με

$$M_{zx} = \frac{1}{2}\int_0^3 y\cdot 2\pi x y\,dx = \pi \int_0^3 x(3+2x-x^2)^2\,dx =$$

$$= \pi \int_0^3 x(9+4x^2+x^4+12x-4x^3-6x^2)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^3 (+x^5-4x^4-2x^3+12x^2+9x)\,dx =$$

$$= \pi\left[+\frac{x^6}{6}-\frac{4x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+4x^3+\frac{9x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \pi\left[+\frac{243}{2}-\frac{4\cdot 243}{5}-\frac{81}{2}+4\cdot 27+\frac{81}{2}\right] =$$

$= 27\pi\left(+\frac{9}{2} - \frac{36}{5} - \cancel{\frac{3}{2}} + 4 + \cancel{\frac{3}{2}}\right) =$

$= \cancel{27\pi\left(+\frac{45+72}{10}+4\right) = 27\pi\frac{-117}{}}$

$= 27\pi \cdot \frac{45-72+40}{10} = \frac{27 \cdot 13}{10}\pi = \frac{351}{10}\pi = 35{,}1\pi.$

Άρα η τεταγμένη $\bar{y}$ του κέντρου μάζας είναι

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{V} = \frac{\frac{351\pi}{10}}{\frac{45\pi}{2}} = \frac{351 \cdot 2}{45 \cdot 10} = \frac{351}{45 \cdot 5} = \frac{117}{75} = 1{,}56.$$

Άλλες επαναληπτικές ασκήσεις:

1). Βρείτε το μήκος του τόξου της καμπύλης

$24xy = x^4 + 48$ από $x=2$ έως $x=4$

Λύση: Επειδή $x \in [2,4]$, το x είναι θετικό, άρα $\neq 0$. Επομένως $y = \frac{x^4+48}{24x} = \frac{x^3}{24} + \frac{2}{x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{24} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x^2}.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{8} - \frac{2}{x^2}\right)^2 = \frac{x^4}{64} + \frac{4}{x^4} - \frac{1}{2}.$$

Άρα $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^4}{64} + \frac{4}{x^4}} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{8} + \frac{2}{x^2}\right)^2} =$

$= \frac{x^2}{8} + \frac{2}{x^2}.$

Το μήκος της καμπύλης είναι: $S = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{8} + \frac{2}{x^2}\right) dx =$

$= \left[\frac{x^3}{24} - \frac{2}{x}\right]_2^4 = \frac{64-8}{24} - \frac{2}{4} + 1 = \frac{56}{24} + \frac{1}{2} = \frac{7}{3} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{14+3}{6} = \frac{17}{6}.$

2) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad t \in [0,4].$$

<u>Λύση</u>: $\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 =$

$= e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \sin t) = e^{2t}(1 - \sin 2t)$

$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}(1 + \sin 2t)$

Άρα $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{e^{2t}(1 \cancel{- \sin 2t} + 1 \cancel{+ \sin 2t})} =$

$= \sqrt{2e^{2t}} = e^t \sqrt{2}$

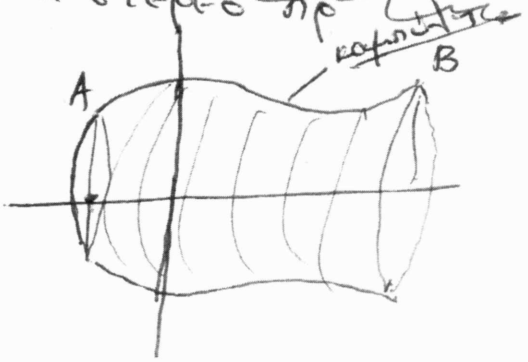
Άρα $S = \int_0^4 e^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\,\left[e^t\right]_0^4 = \sqrt{2}\,(e^4 - 1)$

<u>Επιφάνειες στερεών εκ περιστροφής:</u>

1) Αν ένα στερεό προκύπτει από την περιστροφή επιπέδου ~~καμπύλης~~ χωρίου γύρω από τον άξονα των x το εμβαδόν της επιφάνειας (παράπλευρης) που προκύπτει ισούται με

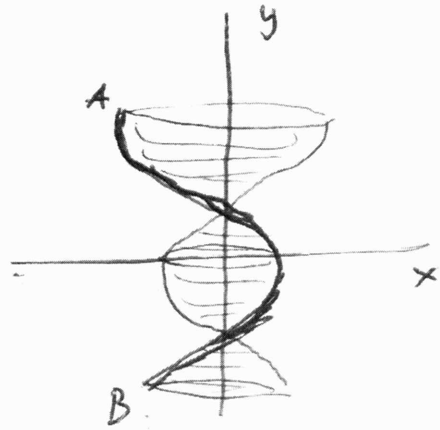
$$2\pi \int_{AB} |y|\, ds, \quad ds = \text{στοιχειώδες μήκος καμπύλης που ορίζει το χωρίο.}$$

2) ~~Αν ένα στερεό πρ~~

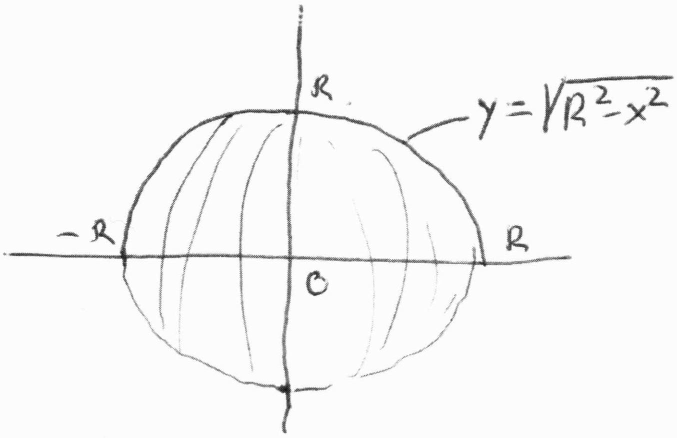


2) Αν ένα στερεό προκύπτει από την περιστροφή επιπέδου καμπύλης γύρω από τον άξονα των y, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας που προκύπτει ισούται με

$$2\pi \int_{AB} |x|\, ds \,, \quad ds = \text{στοιχειώδες μήκος καμπύλης}$$



Εφαρμογές: 1) Να βρεθεί το εμβαδόν σφαίρας ακτίνας R.



Λύση: Το πάνω ημικύκλιο αν περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$ μας δίνει την επιφάνεια σφαίρας.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

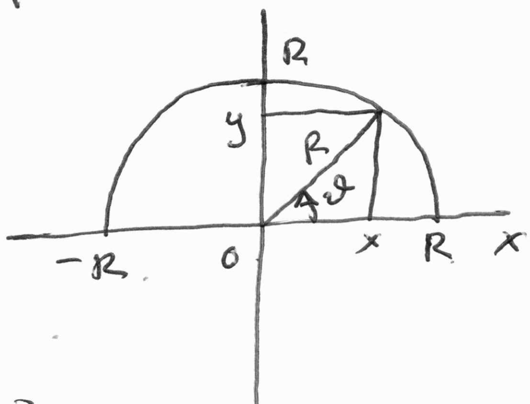
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow ds = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx.$$

Άρα $E = 2\pi\int_{-R}^{R} y\,ds = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx =$

$$= 2\pi\int_{-R}^{R} R\,dx = 2\pi R\int_{-R}^{R} dx = 2\pi R(2R) = \boxed{4\pi R^2}$$

Αλλιώς, εκφράζουμε την καμπύλη παραμετρικά:



$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\vartheta \\ y &= R\sin\vartheta \end{aligned}\right\},\ \vartheta\in[0,\pi].$$

Άρα $x'(\vartheta) = -R\sin\vartheta$, $y'(\vartheta) = R\cos\vartheta$.

Συνεπώς $E = 2\pi\int_0^{\pi} R\sin\vartheta\sqrt{(-R\sin\vartheta)^2+(R\cos\vartheta)^2}\,d\vartheta =$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} R\sin\vartheta\sqrt{R^2(\underbrace{\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta}_{1})}\,d\vartheta = 2\pi R^2\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= 2\pi R^2\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = 2\pi R^2\left[-(-1)+1\right] = 4\pi R^2.$$

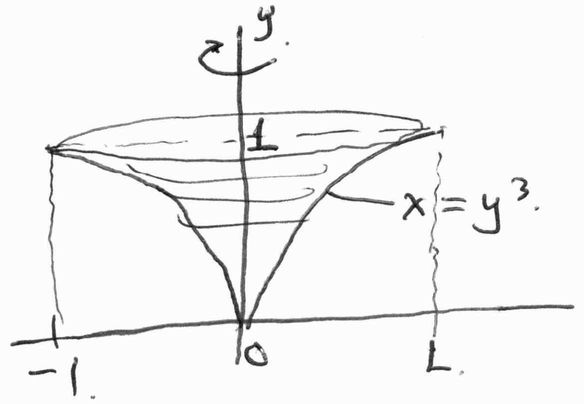
2) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή του τόξου της παραβολής

$$x = y^3,\quad y\in[0,1]$$

Γύρω από τον άξονα $y'y$.

~~β) Γύρω από τον άξονα x'x.~~

Λύση:



$\cancel{E = 2\pi \int_0^1 y^3 ds}$

$$x = y^3 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 3y^2 \quad \text{και} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy =$$

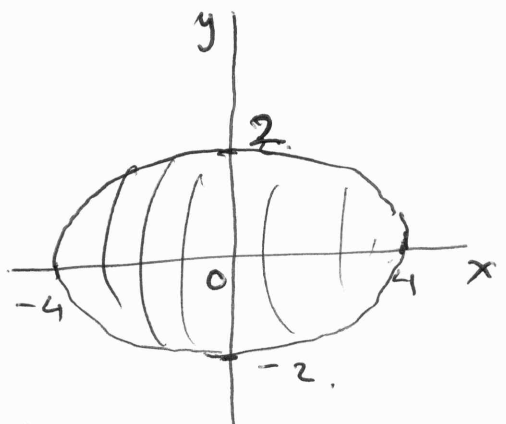
$$= \sqrt{1 + (3y^2)^2}\, dy = \sqrt{1 + 9y^4}\, dy$$

Άρα $E = 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1+9y^4}\, dy = \frac{2\pi}{4 \cdot 9} \int_0^1 \sqrt{1+9y^4}\, d(1+9y^4) =$

$$= \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{18} \left[\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

3). Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.



Να βρεθεί το εμβαδόν όταν η έλλειψη περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$.

Λύση: Θεωρούμε το πάνω τόξο: $y \geq 0$.

Άρα $\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow y^2 = 4 - \frac{x^2}{4} \underset{y\geq 0}{\Longrightarrow} y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}}\left(-\frac{2x}{4}\right) = -\frac{x}{4\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16\left(4-\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{64-4x^2+x^2}{64-4x^2} = \frac{64-3x^2}{64-4x^2}$$

$$ds = \sqrt{\frac{64-3x^2}{64-4x^2}}\,dx$$

$$E = 2\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}\sqrt{\frac{64-3x^2}{64-4x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-4}^{4}\frac{\cancel{\sqrt{16-x^2}}}{2}\,\frac{\sqrt{64-3x^2}}{2\cancel{\sqrt{16-x^2}}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-4}^{4}\sqrt{64-3x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-4}^{4}8\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}x}{8}\right)^2}\,dx =$$

$$= 4\pi\,\frac{8}{\sqrt{3}}\int_{-4}^{4}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}x}{8}\right)^2}\,d\left(\frac{\sqrt{3}x}{8}\right) \underset{u=\frac{\sqrt{3}}{8}x}{=\!=}$$

$$= \frac{32\pi}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{1-u^2}\,du \underset{\substack{u=\sin\theta\\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}{=\!=\!=} \frac{32\pi}{\sqrt{3}}\int_{\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})}^{\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,d(\sin\theta) =$$

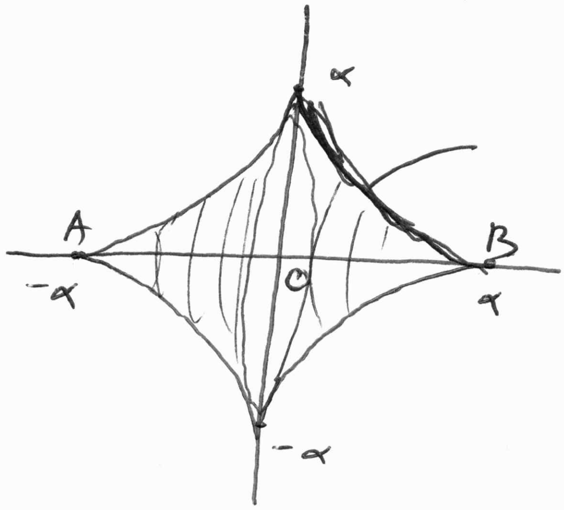
$$= \frac{32\pi}{\sqrt{3}}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \frac{32\pi}{\sqrt{3}}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{32\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{\theta+\cos\theta\sin\theta}{2}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{32\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{32\pi}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

4) Να βρείτε το εμβαδόν που παράγεται από την καμπύλη $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$, $a>0$, $\theta\in[0,2\pi]$

αν περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$.



Λύση: Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E = 2\pi \int_{AB} y\, ds$$, $\pm a$ τα άκρα ολοκλήρωσης ως προς x.

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta.$$

Άρα $\cancel{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = 9a^2\cos}$ $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2\left(\cos^4\theta\sin^2\theta +\right.$

$\left. + \sin^4\theta\cos^2\theta\right) = 9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} =$

$= 9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta.$

Μπορούμε να πάρουμε λόγω συμμετρίας

$E = 2\pi\cdot 2\int_{OB} y\, ds = 4\pi\int_{OB} y\, ds$, δηλαδή στο

1ο τεταρτημόριο. Άρα $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta =$

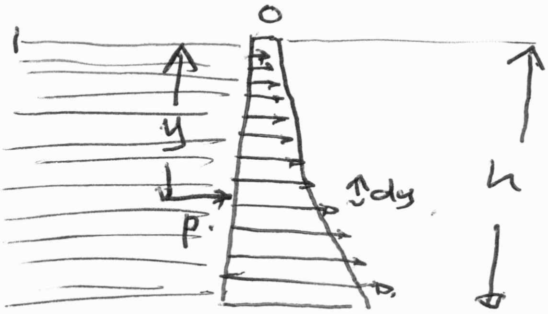
$\underset{\substack{\cos\theta\geq 0 \\ \sin\theta\geq 0}}{=} 3a\cos\theta\sin\theta\, d\theta$ και $y = a\sin^3\theta$.

Επομένως $E = 4\pi \int_0^{\pi/2} a\sin^3\theta \cdot 3a\cos\theta\sin\theta\, d\theta =$

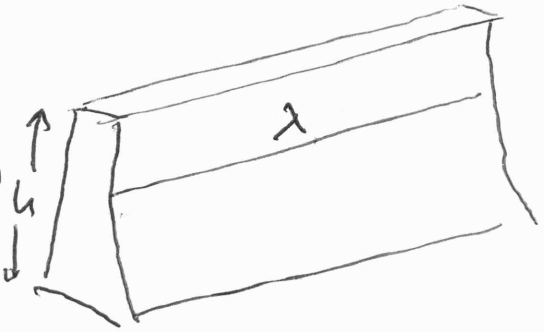
$= 4\pi \cdot 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, (\sin\theta)'\, d\theta \underset{u=\sin\theta}{=\!=}$

$= 12\pi a^2 \int_0^1 u^4\, du = \dfrac{12\pi a^2}{5}.$

<u>Άλλα προβλήματα:</u>



1) Έχουμε ένα φράγμα (λίμνης) ύψους h.
Υποθέτουμε ότι το μήκος του φράγματος είναι λ.



Σε κάθε τετραγωνική μονάδα ασκείται πίεση ανάλογη με το βάθος.
Έστω $p = ky$, y το βάθος από την επιφάνεια.
Η στοιχειώδης δύναμη που ασκείται σε μια ζώνη μήκους λ και ύψους dy που βρίσκεται σε βάθος y ισούται

$dF = p \cdot \lambda dy = k\lambda y dy$. Έστω $a = k\lambda$.

Η συνολική δύναμη που ασκείται από το νερό στο φράγμα είναι $F = \int_0^h dF = a\int_0^h y\,dy = a\dfrac{h^2}{2}$.

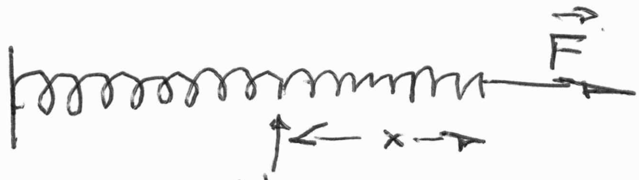
Σε ποιό σημείο ασκείται η συνισταμένη όλων των δυνάμεων;

Υπολογίζουμε τη ροπή ως προς την επιφάνεια, δηλαδή ως προς το O. Έχουμε $M = \int_0^h y\, dF = a\int_0^h y^2 dy =$
$= a\dfrac{h^3}{3}$. Για να βρούμε το σημείο αυτό διαιρούμε τη ροπή προς τη συνολική δύναμη: $\dfrac{M}{F} = \dfrac{ah^3/3}{ah^2/2} = \dfrac{2}{3}h$.

2) Υπολογισμός Έργου:

α) Τέντωμα-συμπίεση ελατηρίου.

Από τη φυσική ξέρουμε ότι για να απομακρύνουμε την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου κατά απόσταση x θα πρέπει να καταβάλλουμε δύναμη μέτρου $F = kx$ (Νόμος του Hooke).



Αν δύναμη 6N απαιτείται για να κρατήσουμε το ελατήριο κατά $\frac{1}{2}$m πέρα από τη θέση ισορροπίας

1) Βρείτε τη σταθερά k.
2) Βρείτε το έργο W που απαιτείται γι' αυτό.

<u>Λύση:</u> Στον τύπο $F=kx$, θέτουμε $F=6N$ και $x=\frac{1}{2}$ m. Άρα $6 = k\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 18\ Nm^{-1}$.

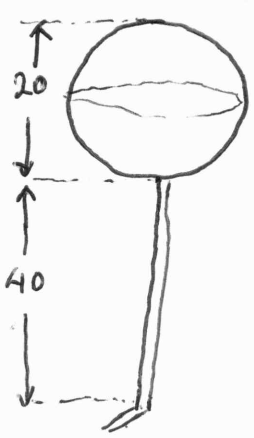
Για το έργο W έχουμε ότι μια μικρή μεταβολή μήκους dx καταναλώνεται έργο $dW = F\,dx = $
$= kx\,dx = 18\,x\,dx$.

Επειδή $x = \frac{1}{2}$, έχουμε $W = \int_0^{1/2} 18x\,dx = 18\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} =$
$= 18\cdot\frac{1}{8} = \frac{9}{4}$ Joule.

β) Σε μία πόλη κατασκεύασαν σφαιρική δεξαμενή νερού διαμέτρου 20m που απέχει από το έδαφος απόσταση 40m.

Η δεξαμενή τροφοδοτείται από σωλήνα διαμέτρου 1m.

Η αντλία είναι τοποθετημένη στο έδαφος.



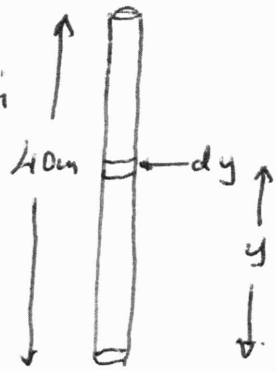
Αν το ειδικό βάρος του νερού είναι $10^3 kg/m^3 = \varepsilon$, πόσο έργο καταναλώνεται για να γεμίσει ο σωλήνας και η δεξαμενή;

Λύση:

Έστω W_L το έργο για να γεμίσει ο σωλήνας

Η ακτίνα του σωλήνα είναι $\frac{1}{2}$ m.

Αν το ύψος του νερού στο σωλήνα αυξηθεί κατά dy, ο όγκος θα αυξηθεί κατά $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 dy$ και το βάρος κατά



$\varepsilon \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} dy$.

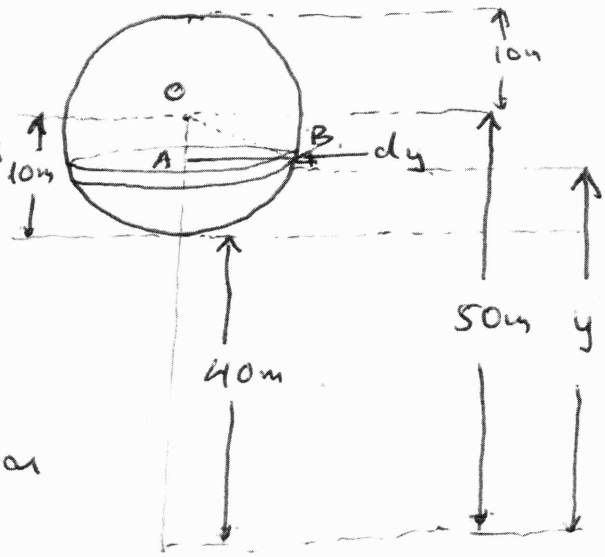
Επειδή ο στοιχειώδης όγκος βρίσκεται σε απόσταση y από το έδαφος το στοιχειώδες έργο που απαιτείται είναι: $dW = \frac{\varepsilon\pi}{4} y\,dy$.

Άρα $W_L = \int_0^{40} \frac{\varepsilon\pi}{4} y\,dy = \frac{\varepsilon\pi}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{40} = \frac{\varepsilon\pi \cdot 40^2}{8} = \frac{\varepsilon\pi \cdot 16\,100}{8} =$

$= 200\,\varepsilon\pi$ (σε Joules)

Έστω W_2 το έργο που απαιτείται για να γεμίσει μετά η δεξαμενή

Αν το ύψος του νερού αυξηθεί κατά dy στη δεξαμενή, τότε ο στοιχειώδης όγκος αντιστοιχεί σε κύλινδρο ύψους dy. Η ακτίνα AB του κυλίνδρου ισούται με



$AB^2 = OB^2 - OA^2 = 10^2 - (50-y)^2$,

Άρα το εμβαδόν της βάσης είναι πAB^2 και ο όγκος

$\pi AB^2 dy = \pi(100-(50-y)^2)dy$

Επειδή ο κύλινδρος βρίσκεται σε απόσταση y από το έδαφος το στοιχειώδες έργο γι' αυτή τη μεταβολή ισούται με

$dW = \varepsilon\pi(100-(50-y)^2)\,y\,dy$

Επομένως το έργο W_2 ισούται με:

$$W_2=\int_{40}^{60} \varepsilon\pi\,(100-(50-y)^2)\,y\,dy = \varepsilon\pi\cdot 100\int_{40}^{60} y\,dy -$$

$$-\varepsilon\pi\int_{40}^{60}(50-y)^2 y\,dy = \varepsilon\pi\cdot 100\left[\frac{y^2}{2}\right]_{40}^{60} -$$

$$-\varepsilon\pi\int_{40}^{60}(2500y+y^3-100y^2)\,dy = \varepsilon\pi(100-2500)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{40}^{60} -$$

$$-\varepsilon\pi\left[\frac{y^4}{4}\right]_{40}^{60} + \varepsilon\pi\cdot 100\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_{40}^{60} = -2400\,\varepsilon\pi\,\frac{60^2-40^2}{2} -$$

$$-\varepsilon\pi\,\frac{60^4-40^4}{4} + \varepsilon\pi\cdot 100\cdot\frac{60^3-40^3}{3} = \varepsilon\pi\frac{2\cdot 10^5}{3} \text{ Joules.}$$

Άρα το συνολικό έργο ισούται με

$$W = W_1 + W_2 = \varepsilon\pi\left(200+\frac{200000}{3}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon\pi}{3}\,(600+200000) = \frac{\varepsilon\pi}{3}\cdot 200600 \text{ Joules}$$

<u>Πιο απλή λύση!</u> Θεωρούμε όλη τη μάζα της σφαίρας συγκεντρωμένη στο κέντρο της που απέχει 50m από το έδαφος. Άρα το έργο (δυναμική ενέργεια) της σφαίρας είναι $\varepsilon\,\frac{4}{3}\pi\cdot 10^3\cdot 50 = \frac{\varepsilon\pi}{3}\,2\cdot 10^5$ Joules

Επίσης θεωρούμε όλη τη μάζα του κυλίνδρου συγκεντρωμένη στο κέντρο βάρους αυτού που απέχει 20m από το έδαφος. Το αντίστοιχο έργο είναι $\varepsilon\pi\,\frac{1}{4}\cdot 40\cdot 20 =$
$= \varepsilon\pi\cdot 200$ Joules

Το συνολικό έργο που απαιτείται ισούται με

$$\frac{\varepsilon\pi}{3}\,2\cdot 10^5 + \varepsilon\pi\cdot 200 = \frac{\varepsilon\pi}{3}\,(200000+600) =$$

$$= \frac{\varepsilon\pi}{3}\,200600 \text{ Joules.}$$