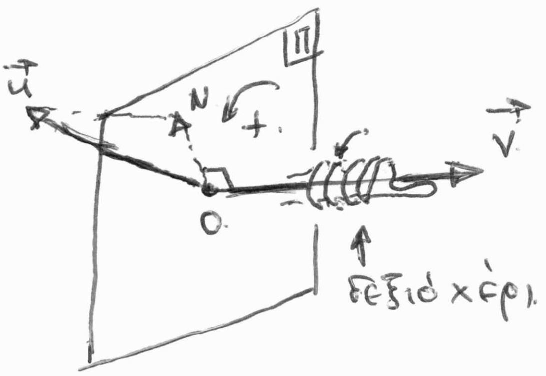
Συνοψίζοντας έχουμε για δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$.



Για να βρω το $\vec{v}\times\vec{u}$ προβάλλω το $\vec{u}$ στο κάθετο επίπεδο στο $\vec{v}$ (ισοδύναμα αφαιρώ από το $\vec{u}$ την προβολή του $proj_{\vec{v}}(\vec{u})$ επί του $\vec{v}$)

Η προβολή $\vec{ON}$ του $\vec{u}$ στο κάθετο επίπεδο (Π) του $\vec{v}$ περιστρέφεται κατά τη θετική φορά (που ορίζει το $\vec{v}$ μέσω του δεξιού χεριού) κατά γωνία 90°. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζω επί το μήκος του $\|\vec{v}\|$ και βρίσκω το $\vec{v}\times\vec{u}$.

Η όλη διαδικασία καταλήγει στο να εκφράσω το $\vec{v}\times\vec{u}$ συναρτήσει των συντεταγμένων (v_1, v_2, v_3) του $\vec{v}$ και των συντεταγμένων (u_1, u_2, u_3) του $\vec{u}$ στη μορφή:

$$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

<u>Ορίζουσα 3x3</u>: Στο Λύκειο μάθαμε ότι με το σύμβολο $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ παριστάνουμε την ποσότητα $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Αυτή είναι μια 2×2 ορίζουσα.

Μια 3×3 ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix}$ είναι η ποσότητα που προκύπτει ως εξής:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix}$$

δηλαδή διαγράφω σε κάθε θέση τη γραμμή και τη στήλη του αντίστοιχου στοιχείου εναλλάσσοντας τα πρόσημα.

Άρα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \vartheta & \kappa \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \kappa \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \vartheta \end{vmatrix} =$

$$= \alpha(\varepsilon\kappa - \zeta\vartheta) - \beta(\delta\kappa - \eta\zeta) + \gamma(\delta\vartheta - \varepsilon\eta)$$

Αυτό μπορώ να το κάνω αναπτύσσοντας ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη βάζοντας κατάλληλα πρόσημα με το μοντέλο της σκακιέρας

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Για παράδειγμα μπορώ να αναπτύξω ως προς την τελευταία γραμμή και να πάρω:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix} = +\eta \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{vmatrix} - \vartheta \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \zeta \end{vmatrix} + \kappa \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{vmatrix} \quad \text{ή}$$

ως προς τη δεύτερη στήλη και να πάρω

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \kappa \end{vmatrix} = -\beta \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \kappa \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \eta & \kappa \end{vmatrix} - \vartheta \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \zeta \end{vmatrix}$$

Μπορεί κάποιος με πράξεις να δείξει ότι όλα τα αποτελέσματα συμπίπτουν.

Επειδή έχουμε βρει ότι $\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \vec{k}$, αυτό που επιτρέπει να γράψω το $\vec{v} \times \vec{u}$

υπό μορφή ορίζουσας ως εξής:

Έστω $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ και $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$.

Τότε $\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$

<u>Σημείωση:</u> Μόνον για τις 3x3 ορίζουσες ισχύει ο κανόνας του Sarrus:

"Έχω την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix}$. Γράφω δεξιά τις δύο πρώτες στήλες

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta & \kappa & \eta & \theta \end{array}\right| \end{array}$$

και προσθέτω τα διαγώνια γινόμενα: $\alpha\varepsilon\kappa + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta$

Μετά αφαιρώ τα διαγώνια γινόμενα.

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc|cc} \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta & \kappa & \eta & \theta \end{array}\right| \\ - \quad - \quad - \end{array} \quad -\beta\delta\kappa - \alpha\zeta\theta - \gamma\varepsilon\eta$$

Τότε $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = \alpha\varepsilon\kappa + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \beta\delta\kappa - \alpha\zeta\theta - \gamma\varepsilon\eta$ (1)

Πράγματι, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \kappa \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \kappa \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix} =$

$= \alpha(\varepsilon\kappa - \zeta\theta) - \beta(\delta\kappa - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta) =$

$= \alpha\varepsilon\kappa + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \alpha\zeta\theta - \beta\delta\kappa - \gamma\varepsilon\eta$ (2)

Τα (1) και (2) είναι ίσα.

<u>Προσοχή!</u> Ο κανόνας του Sarrus ισχύει μόνον για 3x3 ορίζουσες

<u>Ασκήσεις:</u> 1) $\vec{v}=(0,-1,5)$, $\vec{u}=(2,0,-5)$

α) Να βρεθούν οι προβολές $proj_{\vec{v}}(\vec{u})$ και $proj_{\vec{u}}(\vec{v})$.

β) Να βρεθεί το $\vec{v}\times\vec{u}$ και το $\vec{u}\times\vec{v}$.

<u>Λύση:</u> $\|\vec{v}\|=\sqrt{0+1+25}=\sqrt{26}$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$.

α) $proj_{\vec{v}}(\vec{u})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}=\dfrac{0\cdot 2+(-1)\cdot 0+5\cdot(-5)}{26}(-\vec{j}+5\vec{k})=$

$=-\dfrac{25}{26}(-\vec{j}+5\vec{k})=\dfrac{25}{26}\vec{j}-\dfrac{125}{26}\vec{k}$

$proj_{\vec{u}}(\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}=\dfrac{-25}{29}(2\vec{i}-5\vec{k})=-\dfrac{50}{29}\vec{i}+\dfrac{125}{29}\vec{k}$

β) $\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&-1&5\\2&0&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&5\\0&-5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&5\\2&-5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&-1\\2&0\end{vmatrix}\vec{k}$

$=5\vec{i}+10\vec{j}+2\vec{k}$ και $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}=-5\vec{i}-10\vec{j}-2\vec{k}$

Πράγματι $(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{v}=0\cdot 5-1\cdot 10+5\cdot 2=0$ και

$(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{u}=2\cdot 5+0\cdot 10-5\cdot 2=0$ που το

περιμέναμε, αφού $\vec{v}\times\vec{u}\perp\vec{v}$ και $\vec{v}\times\vec{u}\perp\vec{u}$

2) Δείξτε ότι: $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ και

$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$.

<u>Απόδειξη:</u> $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\right)$

Άρα $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=w_1\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}-w_2\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}+w_3\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix}w_1&w_2&w_3\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$ και $\vec{v}\times\vec{w}=\left(\begin{vmatrix}v_2&v_3\\w_2&w_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}v_1&v_3\\w_1&w_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}v_1&v_2\\w_1&w_2\end{vmatrix}\right)$

Άρα $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3\end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix} =$

Επειδή $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$

κ

$\alpha\delta - \beta\gamma = -(\gamma\beta - \alpha\delta)$

έχουμε $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = -u_1 \begin{vmatrix} w_2 & w_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} w_1 & w_3 \\ v_1 & v_3\end{vmatrix} - u_3 \begin{vmatrix} w_1 & w_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ ανάπτυγμα ως προς τη 2η γραμμή

Τώρα $\vec{v}\times\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix} \right)$

Άρα $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ -\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix} \end{vmatrix} \vec{i} -$

$- \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ \begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix} \end{vmatrix} \vec{k} =$

$= \left(u_2(v_1w_2 - w_1v_2) + u_3(v_1w_3 - w_1v_3)\right)\vec{i} - \left(u_1(v_1w_2 - w_1v_2) -\right.$

$\left. - u_3(v_2w_3 - w_2v_3)\right)\vec{j} + \left(-u_1(v_1w_3 - w_1v_3) - u_2(v_2w_3 - w_2v_3)\right)\vec{k}$

$= (v_1u_2w_2 - u_2w_1v_2 + u_3v_1w_3 - u_3w_1v_3)\vec{i} - (u_1v_1w_2 - u_1w_1v_2 -$

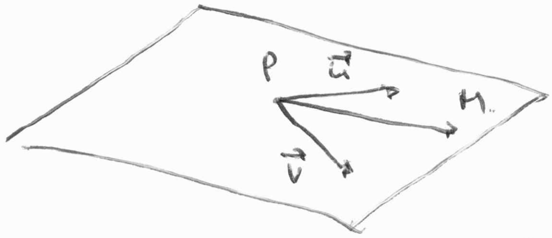
$- u_3v_2w_3 + u_3w_2v_3)\vec{j} + (-u_1v_1w_3 + u_1w_1v_3 - u_2v_2w_3 + u_2w_2v_3)\vec{k}$

και αν κάνετε τις πράξεις για το

$(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$ θα βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα.

<u>Άσκηση:</u> Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $P(1,-1,2)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\vec{u}=(2,3,-1)$ και $\vec{v}=(-1,-1,1)$

<u>Λύση:</u>



Έστω $M(x,y,z)$ ένα σημείο του επιπέδου. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{PM}=(x-1,y+1,z-2)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}=(2,3,-1)$ και $\vec{v}=(-1,-1,1)$

Άρα $(x-1,y+1,z-2)=k\vec{u}+\lambda\vec{v}=(2k-\lambda,3k-\lambda,-k+\lambda)$

Επομένως $\begin{cases}2k-\lambda=x-1\\3k-\lambda=y+1\\-k+\lambda=z-2\end{cases}$. Λύνουμε ως προς k,λ τις δύο πρώτες εξισώσεις: $k=y+1-(x-1)=y-x+2$ και

$\lambda=2k-x+1=2y-2x+4-x+1=-3x+2y+5$

Αντικαθιστούμε στην τελευταία και παίρνουμε:

$$-(y-x+2)+(-3x+2y+5)=z-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -y+\underline{x}-2-\underline{3x}+2y+5-z=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x+y-z=-5 \Leftrightarrow \boxed{2x-y+z=5}$$

<u>Άλλη λύση:</u> Το διάνυσμα $\vec{u}\times\vec{v}$ είναι κάθετο στο $\vec{u}$ και στο $\vec{v}$. Άρα είναι κάθετο και σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου που περνάει από το $P(1,-1,2)$ και είναι ~~παράλληλο~~ γραμμικός συνδυασμός προς τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Άρα το $\vec{u}\times\vec{v}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{PM}=(x-1,y+1,z-2)$

Τώρα $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}3 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=$

$=(2,-1,1)$. Άρα $2(x-1)-(y+1)+z-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{2x-y+z=5}$

<u>Άσκηση!</u> Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $A(1,-2,3)$, $B(4,1,-2)$ και $\Gamma(-2,-3,0)$.

<u>Λύση!</u> $\vec{AB}=(4-1,1-(-2),-2-3)=(3,3,-5)$,

$\vec{A\Gamma}=(-2-1,-3-(-2),0-3)=(-3,-1,-3)$

Το επίπεδο περνά από το A. Αν $M(x,y,z)$ το τυχόν σημείο του επιπέδου, το $\vec{AM}=(x-1,y+2,z-3)$ είναι κάθετο στο

$$\vec{AB}\times\vec{A\Gamma}=\left(\begin{vmatrix}3 & -5\\ -1 & -3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}3 & -5\\ -3 & -3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(-14,24,6)$$

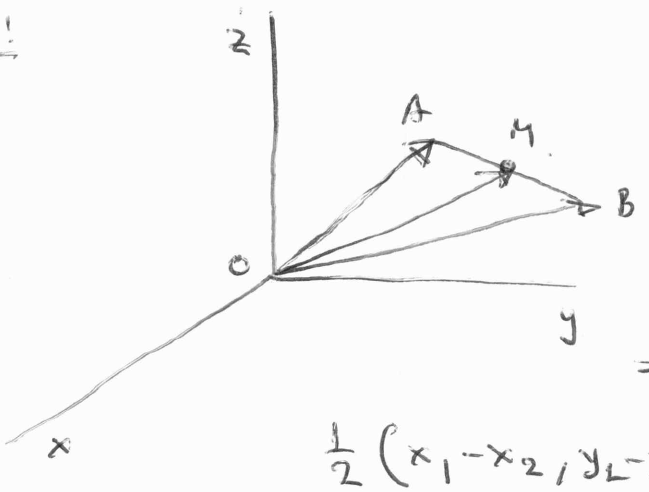
Άρα $-14(x-1)+24(y+2)+6(z-3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -14x+14+24y+48+6z-18=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -14x+24y+6z=-44 \Leftrightarrow \boxed{7x-12y-3z=22}$

<u>Άσκηση!</u> Αν $A(x_1,y_1,z_1)$ και $B(x_2,y_2,z_2)$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του AB

<u>Λύση!</u>



Το διάνυσμα $\vec{OA}$ έχει συντεταγμένες (x_1,y_1,z_1) και το $\vec{OB}$ έχει συντεταγμένες (x_2,y_2,z_2)

Το διάνυσμα $\vec{BM}=$

$=\frac{1}{2}\vec{BA}$ έχει συντεταγμένες

$$\frac{1}{2}(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)=\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2},\frac{z_1-z_2}{2}\right)$$

Άρα οι συντεταγμένες του M, που είναι και συντεταγμένες του $\vec{OM}$ είναι! $\vec{OM}=\vec{OB}+\vec{BM}=(x_2,y_2,z_2)+\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2},\frac{z_1-z_2}{2}\right)=\left(x_2+\frac{x_1-x_2}{2}, y_2+\frac{y_1-y_2}{2}, z_2+\frac{z_1-z_2}{2}\right)=$

$$=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Εξίσωση σφαίρας

Άσκηση: Να βρεθεί η εξίσωση σφαίρας με διάμετρο AB, όπου $A(-1,2,3)$ και $B(5,-2,7)$.

Λύση: Το κέντρο της σφαίρας είναι το μέσον K του AB με συντεταγμένες $K\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{3+7}{2}\right)=(2,0,5)$.

Η ακτίνα R της σφαίρας ισούται με $\|\vec{KA}\|=\|\vec{KB}\|$.

Άρα $R^2=\|\vec{KA}\|^2=(2-(-1))^2+(0-2)^2+(5-3)^2=9+4+4=17$.

Ένα σημείο $M(x,y,z)$ της σφαίρας απέχει από το κέντρο της K απόσταση R.

Άρα $KM^2=(x-2)^2+y^2+(z-5)^2=R^2=17$.

Η εξίσωση της σφαίρας είναι: $(x-2)^2+y^2+(z-5)^2=17$.

Γενική εξίσωση σφαίρας:

Αν $K(a,\beta,\gamma)$ είναι το κέντρο της σφαίρας και η ακτίνα της είναι R, τότε το σημείο $M(x,y,z)$ της σφαίρας απέχει απόσταση R από το K. Άρα

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2\beta y-2\gamma z+$$
$$+a^2+\beta^2+\gamma^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2\beta y-2\gamma z=R^2-a^2-\beta^2-\gamma^2.$$

Θέτουμε $A=-2a$, $B=-2\beta$, $\Gamma=-2\gamma$ και $\Delta=a^2+\beta^2+\gamma^2-R^2$

Τότε η εξίσωση της σφαίρας γίνεται:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0. \quad (1)}$$

Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση (1).

Τότε $x^2+2x\cdot\frac{A}{2}+\frac{A^2}{4}+y^2+2y\cdot\frac{B}{2}+\frac{B^2}{4}+z^2+2z\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Gamma^2}{4}=$

$$=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4} \Leftrightarrow \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\Gamma}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}$$

Αυτή εκφράζει σφαίρα κέντρου $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{\Gamma}{2}\right)$ και ακτίνας $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}}{2}$ αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta>0$, ένα σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{\Gamma}{2}\right)$ αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta=0$ και τίποτα αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta<0$.

Παράδειγμα: Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της σφαίρας
$$x^2+y^2+z^2-10x-8y-12z+68=0.$$

Λύση: $x^2+y^2+z^2-10x-8y-12z+68=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-10x+25)+(y^2-8y+16)+(z^2-12z+36)-25-16-36+68=0$

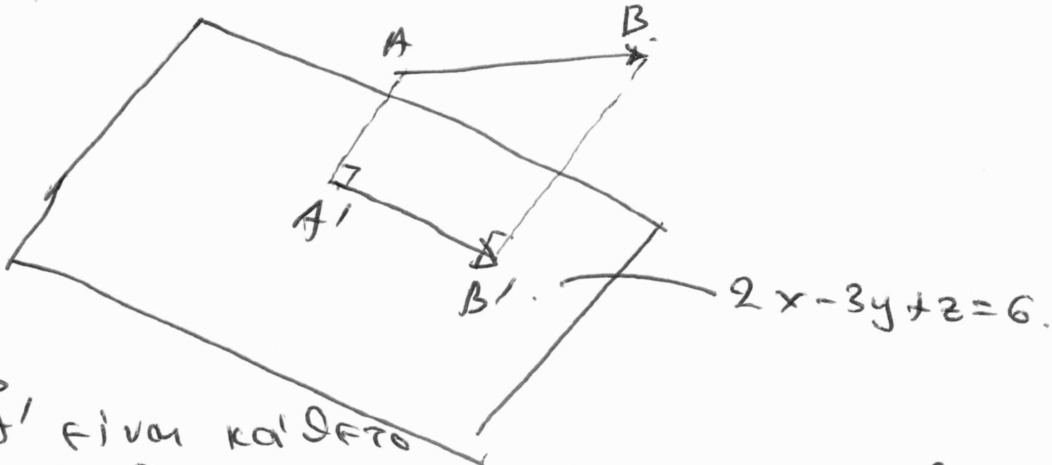
$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-4)^2+(z-6)^2-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=3^2.$

Κέντρο το $(5,4,6)$ και ακτίνα 3.

Άσκηση: Δίνεται το επίπεδο $2x-3y+z=6$.
και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με $A(-1,1,1)$ και $B(0,3,1)$
Να βρεθεί η προβολή του $\overrightarrow{AB}$ επί του επιπέδου.

Λύση:



Το $\overrightarrow{AA'}$ είναι κάθετο
στο επίπεδο, άρα παράλληλο προς το κάθετο
διάνυσμα $\vec{n}=(2,-3,1)$.

Άρα $\overrightarrow{AA'}=\lambda\vec{n}=(2\lambda,-3\lambda,\lambda)$.

Αν $A'=(a_1,a_2,a_3)$, τότε $2a_1-3a_2+a_3=6$. (1)

$\overrightarrow{AA'}=(a_1+1,a_2-1,a_3-1)=(2\lambda,-3\lambda,\lambda)$

Επομένως $\begin{cases} a_1=2\lambda-1 \\ a_2=-3\lambda+1 \\ a_3=\lambda+1 \end{cases}$

Συνεπώς $2(2\lambda-1)-3(-3\lambda+1)+\lambda+1=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda-2+9\lambda-3+\lambda+1=6 \Leftrightarrow 14\lambda=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{5}{7}$. Άρα $a_1=\frac{10}{7}-1=\frac{3}{7}$, $a_2=\frac{-15}{7}+1=-\frac{8}{7}$

$a_3 = \frac{5}{7} + 1 = \frac{12}{7}$.

Άρα $A'\left(\frac{3}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right)$

Ομοίως $B'(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ με $2\beta_1 - 3\beta_2 + \beta_3 = 6$.

και $BB' = (\beta_1 - 0, \beta_2 - 3, \beta_3 - 1) = \mu(2, -3, 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 2\mu \\ \beta_2 = -3\mu + 3 \\ \beta_3 = \mu + 1 \end{cases}$$

Επομένως $2 \cdot 2\mu - 3(-3\mu + 3) + \mu + 1 = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\mu + 9\mu - 9 + \mu + 1 = 6 \Leftrightarrow 14\mu = 14 \Leftrightarrow \mu = 1$.

Άρα $\beta_1 = 2, \beta_2 = 0, \beta_3 = 2$.

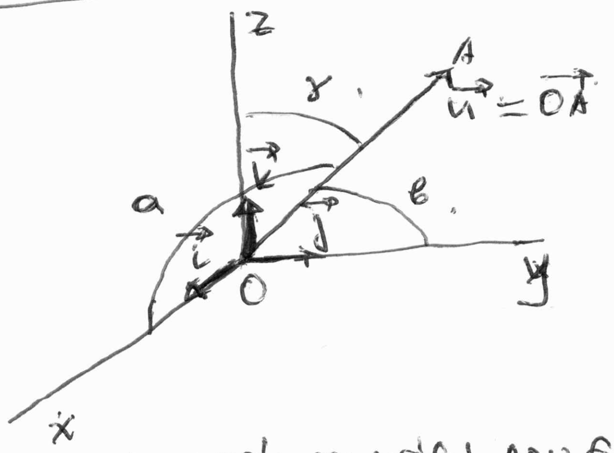
$B' = (2, 0, 2)$

Άρα $\vec{A'B'} = \left(2 - \frac{3}{7}, 0 + \frac{8}{7}, 2 - \frac{12}{7}\right) =$

$= \left(\frac{11}{7}, \frac{8}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

<u>Σημείωση:</u> Αν έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και ένα επίπεδο $Ax + By + \Gamma = \Delta$ $(|A| + |B| + |\Gamma| > 0)$, τότε θεωρούμε το σημείο $A = (u_1, u_2, u_3)$ και το διάνυσμα $\vec{OA}$ (το O έχει συντεταγμένες $(0,0,0)$) και εφαρμόζουμε την προηγούμενη μέθοδο.

<u>Συνημίτονα κατεύθυνσης</u>



Θεωρούμε τις κυρτές γωνίες που σχηματίζει ένα διάνυσμα $\vec{u} = \vec{OA}$ με τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$

Είναι $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$.

Τα συνημίτονα $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ λέγονται συνημίτονα κατευθύνσεως. Ας τα υπολογίσουμε:

Αν $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$, τότε $\vec{u}\cdot\vec{i} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{i}\|\cos\alpha \underset{\|\vec{i}\|=1}{=} \|\vec{u}\|\cos\alpha$. Επίσης $\vec{u}\cdot\vec{i} =$

$$= u_1(\vec{i}\cdot\vec{i}) + u_2(\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{0}) + u_3(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{i}}_{0}) = u_1\|\vec{i}\|^2 = u_1.$$

Άρα $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|} = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}$. Ομοίως $\cos\beta = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}$ και $\cos\gamma = \frac{u_3}{\|\vec{u}\|}$. Το διάνυσμα $\cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k} =$

$$= \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}\vec{i} + \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}\vec{j} + \frac{u_3}{\|\vec{u}\|}\vec{k} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}) =$$

$= \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ είναι ομόρροπο του $\vec{u}$ και έχει μήκος

$$\left\|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\| = 1.$$

Παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Μια συνάρτηση $\vec{F}: \Delta \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ λέγεται διανυσματική συνάρτηση. ($\Delta \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$)

Στο επίπεδο ($\mathbb{R}^2$) έχουμε $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t)) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j}$, όπου f_1, f_2 πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και στον χώρο ($\mathbb{R}^3$) έχουμε $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$.

Η $\vec{F}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της αν και μόνον αν οι f_1, f_2, f_3 είναι παραγωγίσιμες (ως προς t) πραγματικές συναρτήσεις

Η παράγωγος $\vec{F}'$ της $\vec{F}$ είναι η διανυσματική συνάρτηση με τύπο $\vec{F}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))\ \forall t \in \Delta$.

Λέμε ότι η $\vec{F}$ παριστάνει μια καμπύλη (στο επίπεδο ή τον χώρο).

Στο επίπεδο είδαμε ότι το στοιχειώδες μήκος ds μιας καμπύλης είναι $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$.

Στον χώρο το στοιχειώδες μήκος ds μιας καμπύλης είναι $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$.

Αν τώρα $\vec{F}(t)=(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση (καμπύλη) στον χώρο, τότε

$$\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases} \qquad \text{Άρα} \quad \begin{aligned} dx&=f_1'(t)\,dt \\ dy&=f_2'(t)\,dt \\ dz&=f_3'(t)\,dt. \end{aligned}$$

Επομένως το στοιχειώδες μήκος που ορίζει η καμπύλη $\vec{F}$, η οποία εκφράζεται παραμετρικά ως προς t, ισούται με

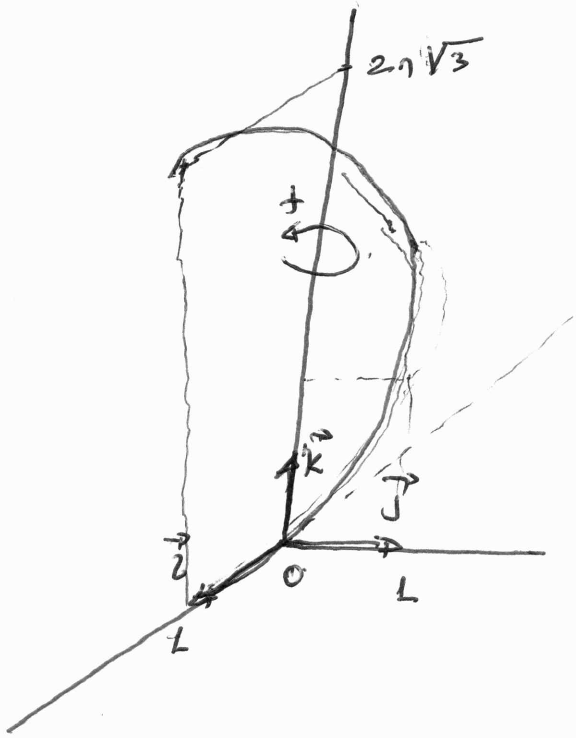
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{(df_1(t))^2+(df_2(t))^2+(df_3(t))^2}=$$
$$=\sqrt{(f_1'(t))^2+(f_2'(t))^2+(f_3'(t))^2}\,dt.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $\vec{F}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ η συνάρτηση με τύπο $\vec{F}(t)=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}+\sqrt{3}\,t\,\vec{k}$.

Τότε το μήκος της καμπύλης που ορίζει η $\vec{F}$ ισούται με

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{[(\cos t)']^2+[(\sin t)']^2+[(\sqrt{3}\,t)']^2}\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+(\sqrt{3})^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+3}\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+3}\,dt=2\int_0^{2\pi}dt=4\pi.$$

Η γραφική της παράσταση είναι μια σπειροειδής έλικα με βήμα $2\pi\sqrt{3}$



Κανόνες παραγώγισης διανυσματικών συναρτήσεων:

1) $\frac{d}{dt}(\vec{F}(t)+\vec{G}(t)) = \vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)$

2) $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{F}(t)) = \lambda\vec{F}'(t)$, όπου λ πραγματική σταθερά.

3) $\frac{d}{dt}(g(t)\vec{F}(t)) = g'(t)\vec{F}(t)+g(t)\vec{F}'(t)$, όπου g πραγματική συνάρτηση του t.

4) $\frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)}_{\text{εσωτ. γινόμενο}}) = \vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t)$

5) $\frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)}_{\text{εξωτερ. γινόμενο}}) = \vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$

6) $\frac{d}{dt}(\vec{F}(g(t))) = \frac{d}{dt}(f_1(g(t)), f_2(g(t)), f_3(g(t))) =$

$= \vec{F}'(g(t))\cdot g'(t)$.

Αποδεικνύουμε μόνον τις ιδιότητες 4), 5) και 6).

4) Έστω $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ και $\vec{G}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$

Τότε $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t) = f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+f_3(t)g_3(t)$.

Επομένως:

$$[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)]' = (f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+f_3(t)g_3(t))' =$$

$$=(f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + (f_3(t)g_3(t))' =$$

$$= f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t) +$$

$$+ f_3'(t)g_3(t) + f_3(t)g_3'(t) =$$

$$= f_1'(t)g_1(t) + f_2'(t)g_2(t) + f_3'(t)g_3(t) +$$

$$+ f_1(t)g_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + f_3(t)g_3'(t) =$$

$$= (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))\cdot(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) +$$

$$+ (f_1(t), f_2(t), f_3(t))(g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)) =$$

$$= \vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t)$$

5) $$\frac{d}{dt}(\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)) = \left(\begin{vmatrix} f_2(t) & f_3(t) \\ g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}', -\begin{vmatrix} f_1(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_3(t) \end{vmatrix}', \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix}' \right)$$

$$= \Big((f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t))', -(f_1(t)g_3(t) - f_3(t)g_1(t))',$$

$$, (f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t))' \Big) =$$

$$= \Big(f_2'(t)g_3(t) + f_2(t)g_3'(t) - g_2(t)f_3'(t) - g_2'(t)f_3(t),$$

$$-(f_1'(t)g_3(t) + f_1(t)g_3'(t) - f_3'(t)g_1(t) - f_3(t)g_1'(t)),$$

$$f_1'(t)g_2(t) + f_1(t)g_2'(t) - f_2'(t)g_1(t) - f_2(t)g_1'(t) \Big) =$$

$$= \Big(f_2'(t)g_3(t) - f_3'(t)g_2(t), -(f_1'(t)g_3(t) - f_3'(t)g_1(t)),$$

$$f_1'(t)g_2(t) - f_2'(t)g_1(t) \Big) + \Big(f_2(t)g_3'(t) - g_2'(t)f_3(t),$$

$$-(f_1(t)g_3'(t) - f_3(t)g_1'(t)), f_1(t)g_2'(t) - f_2(t)g_1'(t) \Big) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} f_2'(t) & f_3'(t) \\ g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} f_1'(t) & f_3'(t) \\ g_1(t) & g_3(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix} \right) +$$

$$+\left(\begin{vmatrix} f_2(t) & f_3(t) \\ g_2'(t) & g_3'(t)\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} f_1(t) & f_3(t) \\ g_1'(t) & g_3'(t)\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1'(t) & g_2'(t)\end{vmatrix}\right) =$$

$$= (f_1(t), f_2(t), f_3(t))' \times (g_1(t), g_2(t), g_3(t)) +$$
$$+ (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \times (g_1(t), g_2(t), g_3(t))' =$$
$$= \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t).$$

б) $(\vec{F}(g(t)))' = (f_1(g(t)), f_2(g(t)), f_3(g(t)))' =$
$$= ((f_1(g(t)))', (f_2(g(t)))', (f_3(g(t)))') =$$
$$= (f_1'(g(t))\, g'(t), f_2'(g(t))\, g'(t), f_3'(g(t))\, g'(t)) =$$
$$= g'(t)(f_1'(g(t)), f_2'(g(t)), f_3'(g(t))) =$$
$$= g'(t) \cdot \vec{F}'(g(t))$$