Πραγματικές συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών

Μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$, όπου $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ λέγεται συνάρτηση δύο μεταβλητών

Παράδειγμα: $f(x,y)=x^2+3y^2$. Εδώ το Ω (πεδίο ορισμού) είναι όλο το $\mathbb{R}^2$. $f(-1,4)=(-1)^2+3\cdot 4^2=1+48=49$.

Μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$, όπου $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ λέγεται συνάρτηση τριών μεταβλητών.

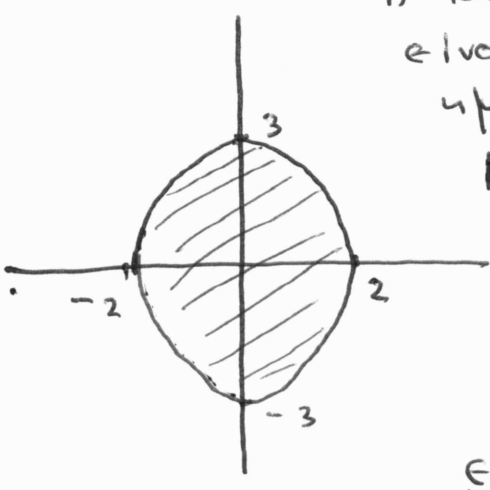
Παράδειγμα: $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$. Εδώ το Ω είναι το $\mathbb{R}^3$ μείον το σημείο $(0,0,0)$. Δηλαδή $\Omega=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x,y)=\sqrt{36-9x^2-4y^2}.$$

Λύση: Θα πρέπει $36\geq 9x^2+4y^2 \iff \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1 \iff$

$$\iff \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\leq 1.$$



Η καμπύλη $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ είναι έλλειψη με ημιάξονες $\alpha=2$ και $\beta=3$. Για να έχουμε $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}\leq 1$ τα σημεία (x,y) πρέπει να βρίσκονται στο εσωτερικό της έλλειψης ή πάνω στην καμπύλη.

Γενικά μπορεί να έχουμε συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών.

Π.χ. Η συνάρτηση $f(x,y,z,w)=\dfrac{x^2y}{\sqrt{\ln(y+z+w)}}$

είναι μια συνάρτηση 4 μεταβλητών.

Το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλες τις τετράδες (x,y,z,w) για τις οποίες $y+z+w>1$.

Μερικές παράγωγοι – κατευθυνόμενη παράγωγος

Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών ($\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$). Έστω $(x_0,y_0)\in\Omega$.

Η μερική παράγωγος ως προς x στο σημείο (x_0,y_0) ορίζεται ως το όριο
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$
Αυτή συμβολίζεται με $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

Ομοίως ορίζεται η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ ως το όριο
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Γενικά, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο ως προς μια μεταβλητή παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως προς αυτή τη μεταβλητή θεωρώντας όλες τις άλλες σταθερές.

Παράδειγμα: $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y+3y^3)=2xy$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2y+3y^3)=$
$=x^2+9y^2$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy))=\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy))=\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{y}.$$

Παράδειγμα: Έστω $z = x^2\sin(xy^2)$. Να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Λύση:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin(xy^2) + x^2\cos(xy^2)\cdot y^2 = $$
$$= 2x\sin(xy^2) + x^2y^2\cos(xy^2).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos(xy^2)\cdot 2xy = 2x^3y\cos(xy^2).$$

Για τρεις ή περισσότερες μεταβλητές ορίζονται αντίστοιχα οι μερικές παράγωγοι:

Παράδειγμα: $w = 2x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(z^2y)$.

Τότε
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) + 0 =$$
$$= 2\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -2x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{z^2y}\cdot z^2 =$$
$$= -2\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{z^2y}\cdot 2zy = \frac{2}{z}.$$

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης:

Αν έχουμε μια συνάρτηση π.χ. δύο μεταβλητών, για παράδειγμα $f(x,y) = xe^y - \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^3y^2$ μπορούμε να βρούμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και μετά αυτές να τις παραγωγίσουμε ξανά ως προς x ή y.

Έχουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Στη συνάρτηση $f(x,y) = xe^y - \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^3y^2$ έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y - \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} + 3x^2y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - \cos\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x^3y = xe^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^y - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2\right) = -\frac{1}{y}\left(-\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right) + 6xy^2 =$$

$$= \frac{1}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y\right) = xe^y - \frac{2x}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) -$$

$$- \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x^3 = xe^y - \frac{2x}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) +$$

$$+ \frac{x^2}{y^4}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y\right) =$$

$$= e^y + \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} - \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right) + 6x^2y =$$

$$= e^y + \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y - \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} + 3x^2y^2\right) =$$

$$= e^y + \sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y} - \cos\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right) + 6x^2y =$$

$$= e^y - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

Πολλές φορές γράφουμε $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$,

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

<u>Άλλο παράδειγμα:</u> Αν $T(w,x,y,z) = z e^{w^2+x^2+y^2}$ είναι συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών να βρεθούν οι T_w, T_x, T_y, T_z, T_{wx}, T_{xw}, T_{zz}.

<u>Λύση:</u> $T_w = \frac{\partial T}{\partial w} = z e^{w^2+x^2+y^2} \cdot 2w = 2wz e^{w^2+x^2+y^2}$

$$T_x = \frac{\partial T}{\partial x} = z e^{w^2+x^2+y^2} \cdot 2x = 2xz e^{w^2+x^2+y^2},$$

$$T_y = \frac{\partial T}{\partial y} = 2yz e^{w^2+x^2+y^2}, \quad T_z = \frac{\partial T}{\partial z} = e^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\cancel{T_{wx} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(2xz e^{w^2+x^2+y^2}\right) = 2z e^{w^2+x^2+y^2} + 4x^2 z e^{w^2+x^2+y^2}}$$

$$T_{wx} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(2xz e^{w^2+x^2+y^2}\right) =$$

$$= 4xzw e^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_{xw} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) = 4xwz e^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{w^2+x^2+y^2}\right) = 0.$$

Παρατηρήσαμε ότι $T_{wx} = T_{xw} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial w \partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial w}$.
Αυτό δεν είναι τυχαίο. Για τις περισσότερες συναρτήσεις (με αυτές που θα ασχοληθούμε) η σειρά παραγώγισης δεν παίζει ρόλο.

Κανόνας της αλυσίδας

Αν, για παράδειγμα έχουμε μια συνάρτηση $f(x,y,z)$ τριών μεταβλητών και κάθε μεταβλητή είναι συνάρτηση δύο άλλων μεταβλητών $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ τότε ~~μπορούμε να~~ η f είναι τελικά συνάρτηση των u και v. Για να βρούμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial u}$ και $\frac{\partial f}{\partial v}$ εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Αν οι x, y, z είναι συναρτήσεις μιας μόνον μεταβλητής τότε και η f είναι συνάρτηση της μεταβλητής αυτής έστω t. Τότε ψάχνουμε την $f'(t)$ υπό την κλασική έννοια.

Παραδείγματα:

$f(x,y,z)=xyz+e^x y+e^y z+e^z x$. και

$x=2t,\ y=t^2,\ z=t^3$.

Τότε $f(x(t),y(t),z(t))=f(t)=2t^6+e^{2t}\cdot t^2+e^{t^2}t^3+e^{t^3}\cdot 2t$

Άρα $\frac{df}{dt}(t) = 12t^5+2t^2e^{2t}+2te^{2t}+3t^2e^{t^2}+$
$+2t^4e^{t^2}+2e^{t^3}+6t^3e^{t^3}$

Αλλά $\frac{\partial f}{\partial x}=yz+e^x y+e^z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=xz+e^x+e^y z$,

$\frac{\partial f}{\partial z}=xy+e^y+e^z x$, $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t$, $\frac{dz}{dt}=3t^2$.

Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=$

$$= (yz + e^x y + e^z)\cdot 2 + (xz + e^x + e^y z)\cdot 2t + (xy + e^y + e^z x)\cdot 3t^2 =$$

$$= (t^2 \cdot t^3 + e^{2t} t^2 + e^{t^3})\cdot 2 + (2t\cdot t^3 + e^{2t} + e^{t^2} t^3)\cdot 2t +$$

$$+ (2t\cdot t^2 + e^{t^2} + e^{t^3} 2t)\cdot 3t^2 =$$

$$= 2t^5 + 2t^2 e^{2t} + 2e^{t^3} + 4t^5 + 2t e^{2t} + 2t^4 e^{t^2} +$$

$$+ 6t^5 + 3t^2 e^{t^2} + 6t^3 e^{t^3} = 12t^5 + 2t^2 e^{2t} + 2t e^{2t} +$$

$$+ 3t^2 e^{t^2} + 2t^4 e^{t^2} + 2e^{t^3} + 6t^3 e^{t^3} = f'(t).$$

Κατευθυνόμενη παράγωγος

Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ μοναδιαίο διάνυσμα: $\|\vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$.

Η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\vec{u}} f(x,y,z)$ μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών είναι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h},$$ όπου με $\vec{x}$ συμβολίζουμε

το διάνυσμα $\vec{x} = (x, y, z)$.

Άρα $D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+u_1 h, y+u_2 h, z+u_3 h) - f(x,y,z)}{h}$.

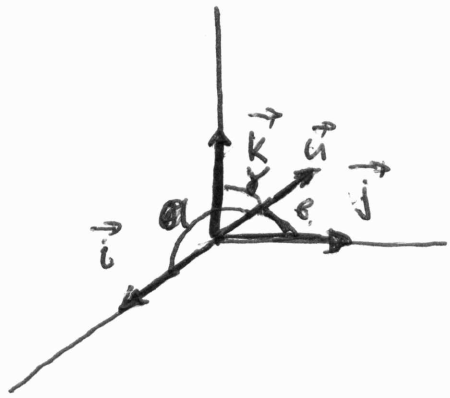
Αν με $x(h)$ συμβολίσουμε το $x+u_1 h$, με $y(h)$ το $y+u_2 h$, και με $z(h)$ το $z+u_3 h$ τότε ψάχνουμε την παράγωγο

$$\frac{df}{dh}(x+u_1 h, y+u_2 h, z+u_3 h) = \frac{df}{dh}(x(h), y(h), z(h)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dh} = u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} + u_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Επειδή $\|\vec{u}\| = 1$, οι συντεταγμένες του u_1, u_2, u_3 είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης $\cos a$, $\cos b$, $\cos \gamma$

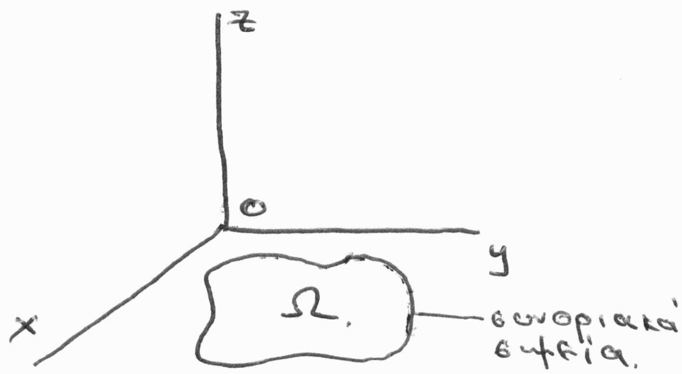
των κυρτών γωνιών που σχηματίζει με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$.



Άρα $D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial f}{\partial z}$.

Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Έστω $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών x, y. Αν το Ω στο xy-επίπεδο περιβάλλεται από μια καμπύλη,



Τα σημεία της καμπύλης λέγονται συνοριακά σημεία.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $(x_0, y_0) \in \Omega$ αν σε μια περιοχή του (x_0, y_0) η f παίρνει μέγιστη τιμή στο (x_0, y_0).

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(x_0, y_0) \in \Omega$ αν σε μια περιοχή του (x_0, y_0) η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο (x_0, y_0).

Τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα λέγονται τοπικά ακρότατα.

Θέσεις πιθανών ακροτάτων:

1) Συνοριακά σημεία

2) Σημεία στο εσωτερικό του Ω με $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3) Σημεία στα οποία δεν υπάρχει κάποια από τις μερικές παραγώγους.

Τα σημεία των περιπτώσεων 2) και 3) λέγονται <u>κρίσιμα</u> σημεία.

<u>Κριτήριο της 2ης Παραγώγου:</u>

Υποθέτουμε ότι η f έχει σ' ένα σημείο τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$, οι οποίες μηδενίζονται στο σημείο αυτό (x_0, y_0).

Θεωρούμε την ορίζουσα. $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = D$.

Αυτή λέγεται ορίζουσα του Hesse (Εσσιανή)
(Αν φυσικά υπάρχουν οι δεύτερες παράγωγοι).

Είναι $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$.

1) Αν $D>0$ και $f_{xx}>0$ στο (x_0, y_0), τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0)

2) Αν $D>0$ και $f_{xx}<0$ στο (x_0, y_0), τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0).

3) Αν $D<0$, τότε η f λέμε ότι παρουσιάζει σάγμα (σαμάρι) στο (x_0, y_0).

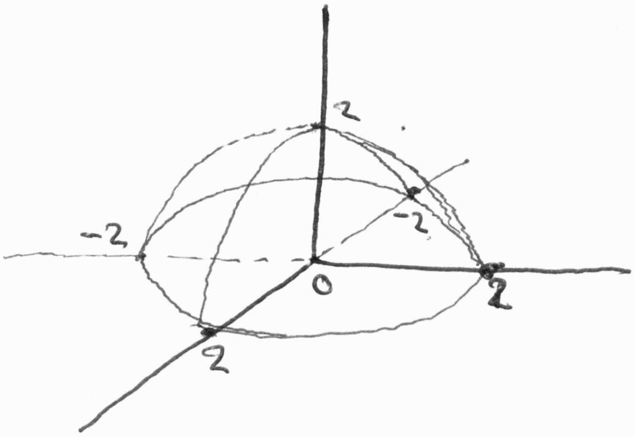
4) Αν $D=0$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα: $f(x,y) = z = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Πεδίο ορισμού στο xy-επίπεδο: $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\} =$

$=$ εσωτερικό του κύκλου ακτίνας 2 (συν του κύκλο)

Γραφική παράσταση:



Είναι το πάνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = 2^2$.
Προφανώς στο $(0,0)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
Ας το επαληθεύσουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Είναι $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 0$.

Υποψήφιο σημείο το $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{4-x^2-y^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2} = -\frac{4-x^2-y^2+2x^2}{(4-x^2-y^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{4+x^2-y^2}{(4-x^2-y^2)^{3/2}}. \quad \text{Ομοίως} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{4-x^2+y^2}{(4-x^2-y^2)^{3/2}}$$

Τώρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right) = -y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right) =$

$$= -y\left(-\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}}{4-x^2-y^2}\right) = -\frac{xy}{(4-x^2-y^2)}$$

Τώρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{4+0^2-0^2}{(4-0^2-0^2)^{3/2}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$

και $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

Άρα $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ και

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{2}$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $(0,0)$.

Παράδειγμα: Βρείτε τα ακρότατα, αν υπάρχουν της συνάρτησης F με $F(x,y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$.

Λύση: $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - 9 = 9(x-1)(x+1)$. Άρα $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 2(y+2)$. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

$f_{xx} = 18x$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$.

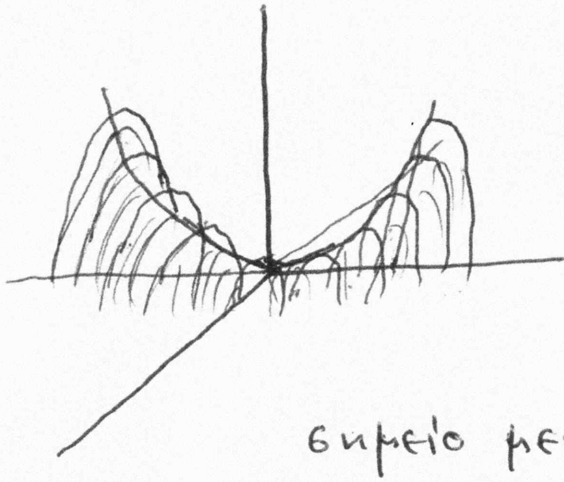
Άρα $D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 18x \cdot 2 - 0^2 = 36x$.

Στο $(1,-2)$ έχουμε $D = 36 > 0$. ~~Άρα~~ και $f_{xx}(1) = 18 > 0$.

Άρα στο $(1,-2)$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Στο $(-1,-2)$ έχουμε $D = -36 < 0$. Άρα στο $(-1,-2)$ παρουσιάζει σάγμα.

Σημείο σάγματος — γεωμετρική παράσταση



Στο $(0,0)$ έχουμε σάγμα. Κάτι που μοιάζει με "σαμάρι". Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, αλλά το $(0,0)$ δεν είναι σημείο μεγίστου ή ελαχίστου.

Άλλο παράδειγμα: Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση της καμπύλης $z^2 = x^2y + 4$ από την αρχή των αξόνων.

Λύση: Συνοριακά σημεία: Πρέπει $x^2y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2y \geq -4$.

Άρα συνοριακά σημεία: $x^2y = -4 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{x^2}$.

Οπότε $z^2 = x^2\left(-\frac{4}{x^2}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Σ' αυτήν την περίπτωση το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι: $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 =$

$$= x^2 + \frac{16}{x^4} + 0^2 = x^2 + \frac{16}{x^4}, \quad x \neq 0.$$

~~Αλλά~~ $\cancel{x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 8 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 \geq 0}$ Συνέχεια στο τέλος της άσκησης

Στα συνοριακά σημεία η τιμή της d^2 είναι ≥ 8.

Αν τώρα κάνουμε τον μετασχηματισμό $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 =$

$= x^2 + y^2 + \underbrace{x^2y + 4}_{z^2} = f(x,y)$ παίρνουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Τότε $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy = 2x(y+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = -1$

Επίσης $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x^2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x^2}{2}$

Αν $x = 0$, τότε $y = 0$. Υποψήφιο σημείο το $(0,0)$.

Αν $y=-1$ παίρνουμε $-1=-\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Υποψήφια σημεία τα $(\sqrt{2},-1)$ και $(-\sqrt{2},-1)$.

Τώρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2+2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x$.

Άρα $D=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=2(1+y)\cdot 2-4x^2=$

$=4(1+y-x^2)$.

Στο $(0,0)$ έχουμε: $D(0,0)=4>0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2>0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

~~Στο $(\pm\sqrt{2},-1)$ έχουμε: $D(\sqrt{2},-1)=4(1+1-2)=-8<0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2},-1)$~~ Στο $(\pm\sqrt{2},-1)$ έχουμε

$D(\pm\sqrt{2},-1)=4(1-1-2)=-8<0$

άρα τα σημεία $(\sqrt{2},-1)$ και $(-\sqrt{2},-1)$ είναι σαγματικά.

Άρα το μόνο σημείο ελαχίστου είναι το $(0,0)$ με

$d^2=0^2+0^2+0^2\cdot 0+4=4 \Rightarrow d=2$ η ελάχιστη απόσταση.

<u>Παράδειγμα:</u> $f(x,y)=xy^2-6x^2-3y^2$.

Έχουμε: $f_x=y^2-12x$, $f_y=2xy-6y=2y(x-3)$.

Άρα $f_y=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $x=3$

$f_x=0 \Leftrightarrow y^2=12x$.

Αν $y=0$, τότε $x=0$. Υποψήφιο σημείο το $(0,0)$.

Αν $x=3$, τότε $y^2=3\cdot 12=36 \Leftrightarrow y=\pm 6$.

Υποψήφια σημεία τα $(3,6)$ και $(3,-6)$.

$f_{xx}=-12$, $f_{yy}=2x-6$, $f_{xy}=2y$.

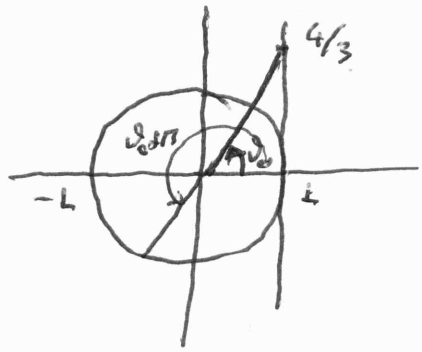
$D=-12\cdot(2x-6)-4y^2=-24(x-3)-4y^2$.

Στο $(0,0)$ έχουμε: $D(0,0)=-24\cdot(-3)=72>0$.

και $f_{xx}(0,0)=-12<0$, άρα το $(0,0)$ είναι θέση μεγίστου.
Στα $(3,\pm 6)$ έχουμε: $D=-24(3-3)-4\cdot 6^2=-144<0$.
Άρα τα σημεία $(3,6)$ και $(3,-6)$ είναι σαγματικά σημεία.

<u>Παράδειγμα:</u> $f(x,y)=x^2-6x+y^2-8y+7$ με πεδίο ορισμού $\Omega=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1\}$ το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-6=2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=3$ που με κάθε $y\in\mathbb{R}$ βρίσκεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.
Πάμε στα συνοριακά σημεία. Θέτουμε $x=\cos\vartheta$ και $y=\sin\vartheta$.
Άρα $f(\vartheta)=\cos^2\vartheta-6\cos\vartheta+\sin^2\vartheta-8\sin\vartheta+7=$
$=-6\cos\vartheta-8\sin\vartheta+8$.
$f'(\vartheta)=6\sin\vartheta-8\cos\vartheta=0 \Leftrightarrow 6\sin\vartheta=8\cos\vartheta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \tan\vartheta=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.
Άρα $\vartheta=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)=\vartheta_0+k\pi$.
Επίσης $f''(\vartheta)=6\cos\vartheta+8\sin\vartheta$.
Για $\vartheta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε $f''(\vartheta)>0$ άρα ελάχιστο στο σημείο $(\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)$.



Για $\vartheta_0+\pi\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $f''(\vartheta)<0$, άρα μέγιστο στο σημείο $(\cos(\vartheta_0+\pi),\sin(\vartheta_0+\pi))$.

<u>Παράδειγμα:</u> $f(x,y)=xy+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}$
Πεδίο ορισμού, όλο το $\mathbb{R}^2$ πλην των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

$f_x(x,y) = y - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x^2}$

$f_y(x,y) = x - \frac{4}{y^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{y^2}$

Άρα $y = \dfrac{2}{\frac{16}{y^4}} = \dfrac{y^4}{8} \Leftrightarrow y^4 - 8y = 0 \Leftrightarrow y(y^3-8) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ (απορρίπτεται) ή $y = 2$.

Για $y=2$, $x=1$. Υποψήφιο σημείο το $(1,2)$

$f_{xx} = \frac{4}{x^3}$, $f_{yy} = \frac{8}{y^3}$, $f_{xy} = 1$.

$f_{xx}(1,2) = 4$, $f_{yy}(1,2) = 1$, $f_{xy} = 1$.

$\Delta(1,2) = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3 > 0$. και επειδή $f_{xx}(1,2) = 4 > 0$ η f έχει ελάχιστο στο $(1,2)$

Ο Τελεστής ανάδελτα ∇ (ανάποδο δέλτα)

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$ συμβολίζουμε με

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ στο επίπεδο } \mathbb{R}^2$$

ή

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ στο χώρο } \mathbb{R}^3.$$

Είναι απλά ένα σύμβολο.

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ αν η f είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ αν η f είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών

Μέγιστα και ελάχιστα υπό συνθήκες – Πολλαπλασιαστές του Lagrange

Έστω f, g συναρτήσεις από ένα $\subseteq \mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$ και τιμές στο $\mathbb{R}$.

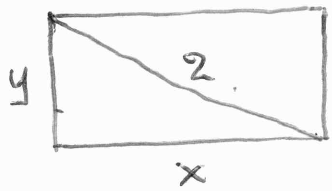
Υπό τη συνθήκη $g(x,y)=0$ να βρεθούν τα ~~μέγιστα~~ ακρότατα της f. (Υπό τη συνθήκη $g(x,y,z)=0$ να βρεθούν τα ακρότατα της f).

Τα σημεία αναζητούνται σε αυτά τα $\vec{x}$ με

$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x}) \\ \text{και} \\ g(\vec{x}) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \lambda \text{ πολλαπλασιαστής} \\ \text{του Lagrange} \end{array} \right)$$

<u>Παράδειγμα:</u> Ποιο είναι το μεγαλύτερο εμβαδόν ορθογωνίου με διαγώνιο ίση με 2;

<u>Λύση:</u>



$f(x,y) = xy$ το εμβαδόν και $g(x,y) = x^2+y^2-4$.

$\nabla f(x,y) = (y, x)$ και $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$.

Άρα $(y,x) = \lambda(2x, 2y) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases}$

Άρα $y = 2\lambda x = 4\lambda^2 y$ και $y>0$. Άρα $4\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

Η τιμή $\lambda = -\frac{1}{2}$ απορρίπτεται γιατί τότε $y=-x$ (κάποιο θα ήταν αρνητικό).

Άρα $\lambda = \frac{1}{2}$ και $x=y$. Άρα $x^2+x^2-4=0=g(x,x)$

$\Leftrightarrow x^2 = 2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{2} = y$

Το μεγαλύτερο εμβαδόν το έχει το τετράγωνο πλευράς $\sqrt{2}$.

Παράδειγμα: Με τη μέθοδο του Lagrange βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=y^2-x^2$ πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 17

Λύση: $g(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-1$.

$$\nabla g(x,y)=\left(\frac{x}{2},2y\right),\quad \nabla f(x,y)=(-2x,2y)$$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \Leftrightarrow \begin{cases}-2x=\frac{\lambda x}{2}\\ 2y=2\lambda y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda x+4x=0\\ y(1-\lambda)=0\end{cases}$$

Αν $\lambda=1$, τότε $5x=0 \Leftrightarrow x=0$.
$g(x,y)=0 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$.

$\boxed{\text{Υποψήφια σημεία } (0,1) \text{ και } (0,-1)}$

Αν $\lambda\neq 1$, τότε $y=0$ και $\frac{x^2}{4}=1 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Υποψήφια σημεία τα $(2,0)$ και $(-2,0)$

$f(0,1)=1^2-0^2=1$.

$f(0,-1)=(-1)^2-0^2=1$.

$f(2,0)=0^2-4=-4=f(-2,0)$

Άρα στα σημεία $(0,\pm 1)$ έχουμε μέγιστο και στα σημεία $(\pm 2,0)$ έχουμε ελάχιστο.

Μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη το -4.

Παράδειγμα: Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης
$f(x,y,z)=3x+2y+z+5$ υπό την συνθήκη
$g(x,y,z)=9x^2+4y^2-z=0$.

Λύση: $\nabla f(x,y,z)=(3,2,1)$, $\nabla g(x,y,z)=(18x,8y,-1)$

$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow (3,2,1) = \lambda(18x, 8y, -1)$ και

$9x^2 + 4y^2 - z = 0$.

Άρα $\begin{cases} 18\lambda x = 3 \\ 8\lambda y = 2 \\ -\lambda = 1 \\ 9x^2+4y^2-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18x = 3 \\ -8y = 2 \\ \lambda = -1 \\ 9x^2+4y^2-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{4} \\ \lambda = -1 \\ z = 9\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{36} + \frac{4}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Άρα το μοναδικό σημείο είναι το $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$f\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{6} - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} + 5 = -\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + 5 = \frac{9}{2}$

Το $\frac{9}{2}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f υπό τη συνθήκη

$9x^2 + 4y^2 - z = 0$, γιατί για παράδειγμα, αν πάρουμε

$x = y = 1$ και $z = 13$ τότε ισχύει η $9x^2 + 4y^2 - z = 0$

και $f(1,1,13) = 3 + 2 + 13 + 5 = 23 > \frac{9}{2}$