Στο παράδειγμα της σελίδας 12 του προηγούμενου μαθήματος, απομένει ο υπολογισμός της ελάχιστης τιμής του τετραγώνου $d^2 = x^2+y^2+z^2$ της απόστασης της καμπύλης $z^2 = x^2y+4$ από την αρχή των αξόνων <u>στα συνοριακά σημεία</u> $\left(x, -\frac{4}{x^2}, 0\right)$, $x \neq 0$.

Εκεί βρήκαμε ότι

$$d^2 = x^2 + \frac{16}{x^4}.$$

Εφόσον $x \neq 0$, το $u = x^2$ είναι θετικό. Αρκεί να θεωρήσουμε το $d^2 = u + \frac{16}{u^2}$, $u \in (0, +\infty)$ ως συνάρτηση του $u > 0$.

Έστω $g(u) = u + \frac{16}{u^2}$, $u \in (0, +\infty)$.

Τότε $g'(u) = 1 - \frac{32}{u^3}$. Παρατηρούμε ότι:

$g'(u) < 0 \iff 1 < \frac{32}{u^3} \iff u^3 < 32 = 8 \cdot 4 \iff u < 2\sqrt[3]{4}$.

$g'(u) = 0 \iff 1 = \frac{32}{u^3} \iff u^3 = 8 \cdot 4 \iff u = 2\sqrt[3]{4}$.

και $g'(u) > 0 \iff \ldots \ u > 2\sqrt[3]{4}$.

Άρα

u	0		$2\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Η ελάχιστη τιμή επιτυγχάνεται για $u = 2\sqrt[3]{4}$.

Αυτή ισούται με $g(2\sqrt[3]{4}) = 2\sqrt[3]{4} + \frac{16}{4\sqrt[3]{16}} = 2\sqrt[3]{4} + \frac{4}{\sqrt[3]{8\cdot 2}} =$

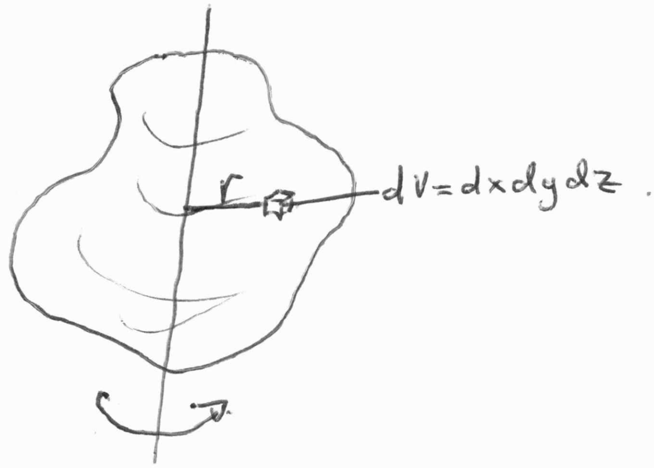
$= 2\sqrt[3]{4} + \frac{4}{2\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{4} + \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{4} + \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = 3\sqrt[3]{4}$.

Αλλά $3\sqrt[3]{4} > 4 \iff 27 \cdot 4 > 4^3 \iff 108 > 64$.

Άρα στα συνοριακά σημεία η ελάχιστη τιμή υπερβαίνει την ελάχιστη τιμή του d^2 που βρήκαμε ίση με 4.

Άρα $\boxed{d = 2}$

Ροπή αδράνειας στερεού σώματος



Αν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, η κινητική του ενέργεια ισούται

$$E=\frac{1}{2} I \omega^2$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα και I η λεγόμενη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα.

Αν το σώμα αποτελείται από στοιχειώδη σωμάτια $m_1, m_2, \dots, m_k$ που απέχουν αποστάσεις $r_1, r_2, \dots, r_k$ από τον άξονα περιστροφής, τότε το I ισούται με

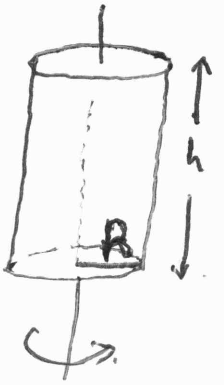
$$I = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + \dots + r_k^2 m_k \quad (1)$$

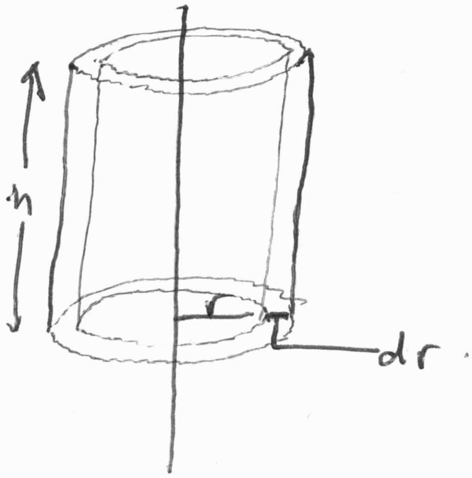
Εμείς θα περιοριστούμε σε ομογενή σώματα, δηλαδή σώματα με σταθερή πυκνότητα. Χάριν απλότητος, η πυκνότητα θα ισούται με 1.

Αν το σώμα είναι συμπαγές, τότε η εξίσωση (1) αντικαθίσταται από ένα ολοκλήρωμα.

Ας δούμε κάποιες εφαρμογές:

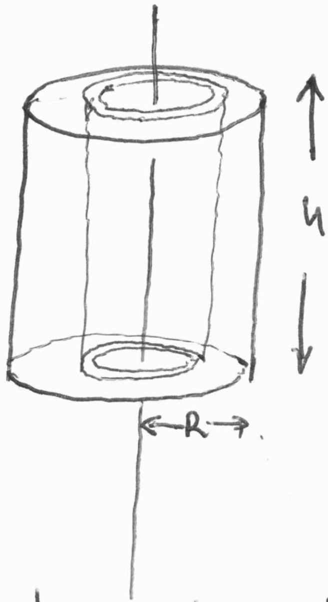
Ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως άξονα που περνάει από τα κέντρα των βάσεων.





Εάν έχουμε ένα λεπτό κυλινδρικό κέλυφος πάχους dr που απέχει από τον άξονα περιστροφής ακτίνα r, τότε ο συνολικός όγκος $2\pi r \cdot dr \cdot h$. (h το ύψος του κυλίνδρου) απέχει από τον άξονα απόσταση r.
Αν η πυκνότητα είναι $\rho = 1$, τότε το dI ισούται

$$dI = r^2 2\pi r \cdot dr \cdot h = 2\pi r^3 \cdot h\, dr$$



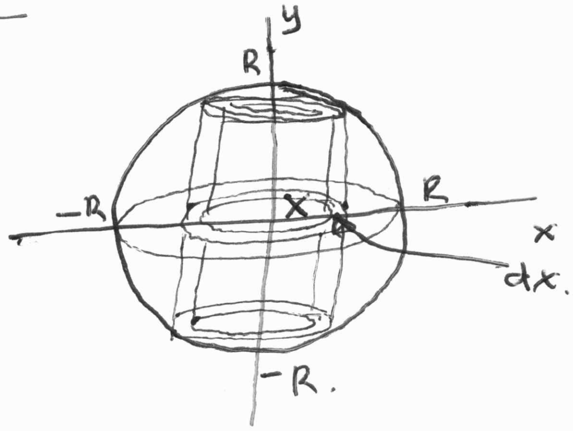
Αν η ακτίνα της βάσης είναι R και το ύψος h, χωρίζουμε τον κύλινδρο σε λεπτά κελύφη πάχους dr, ακτίνας r και ύψους h. Η στοιχειώδης ροπή αδράνειας ισούται με

$$dI = 2\pi h r^3 dr.$$

Άρα η συνολική ροπή αδράνειας ισούται με

$$I = 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{\pi h R^4}{2}.$$

Περίπτωση σφαίρας με άξονα περιστροφής μια διάμετρό της



Εδώ $x=r\in[0,R]$. Το ύψος h κάθε κελύφους ισούται με $2\sqrt{R^2-x^2}$

Άρα $I=2\pi\int_0^R x^3\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx=4\pi\int_0^R x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

Θέτουμε $x=R\sin\vartheta$, $\vartheta\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2(1-\sin^2\vartheta)}=$

$=R|\cos\vartheta| \underset{\substack{\cos\vartheta\geq 0\\ \vartheta\in[0,\frac{\pi}{2}]}}{=\!=} R\cos\vartheta$ και $dx=R\cos\vartheta\,d\vartheta$.

Άρα $I=4\pi\int_0^{\pi/2}R^3\sin^3\vartheta\,R\cos\vartheta\cdot R\cos\vartheta\,d\vartheta=4\pi R^5\int_0^{\pi/2}\sin^3\vartheta\cos^2\vartheta\,d\vartheta$

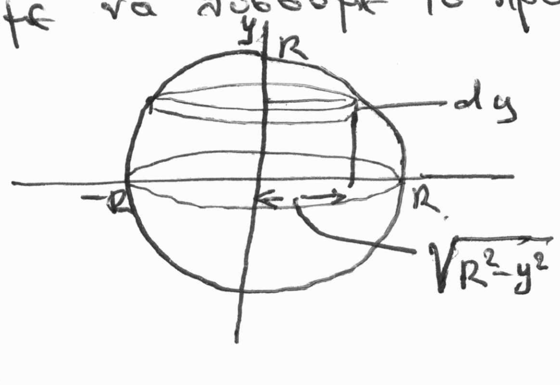
$=4\pi R^5\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\vartheta)\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta=-4\pi R^5\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\vartheta)\cos^2\vartheta\,d(\cos\vartheta)$

$=4\pi R^5\int_0^{\pi/2}(\cos^2\vartheta-1)\cos^2\vartheta\,d(\cos\vartheta)=4\pi R^5\Big[\int_0^{\pi/2}\cos^4\vartheta\,d(\cos\vartheta)-$

$-\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\,d(\cos\vartheta)\Big]=4\pi R^5\Big[\Big[\frac{\cos^5\vartheta}{5}\Big]_0^{\pi/2}-\Big[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\Big]_0^{\pi/2}\Big]=$

$=4\pi R^5\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{8\pi R^5}{15}$.

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα και διαφορετικά



Χωρίζουμε τη σφαίρα σε οριζόντιες κυλινδρικές πλάκες πάχους dy. Η ακτίνα κάθε πλάκας είναι $\sqrt{R^2-y^2}$

Επειδή κάθε οριζόντια φέτα είναι κύλινδρος ακτίνας (5
$\sqrt{R^2-y^2}$ και ύψους dy, η ροπή αδράνειας ως προς τον $y'y$ ισούται με

$$dI = \frac{\pi\, dy \cdot \left(\sqrt{R^2-y^2}\right)^4}{2}$$

Επομένως $I = \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-y^2}\right)^4 dy = \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-y^2)^2\, dy =$

$$= \pi \int_0^R (R^4 + y^4 - 2R^2y^2)\, dy =$$

$$= \pi R^5 + \pi\frac{R^5}{5} - 2R^2\cdot\frac{R^3}{3} = \pi R^5\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right) = \pi R^5\,\frac{15+3-10}{15} =$$

$$= \frac{8\pi R^5}{15}$$

<u>Άσκηση</u>: Να βρείτε τη ροπή αδράνειας ορθού κυκλικού κώνου, ακτίνας βάσης R και ύψους h, όταν ο κώνος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του.