ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f: [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Μια ευθεία $\varepsilon(x) = \alpha x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, αν $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta \in \mathbb{R}$.
Αν $\alpha = 0$, η $\varepsilon(x) = \beta$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη.
Αν $\alpha \neq 0$, η $\varepsilon(x) = \alpha x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη.
Ανάλογα ορίζεται ασύμπτωτη στο $-\infty$, αν η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, x_0]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f: (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Λέμε ότι η κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ είναι ασύμπτωτη της f στο x_0, αν

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \acute{\eta} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty .$$

Για την μελέτη συνάρτησης, κάνουμε τα εξής βήματα:

(1) Προσδιορίζουμε το μέγιστο δυνατό πεδίο ορισμού.
(2) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ και προσδιορίζουμε το πρόσημο της f μεταξύ των ριζών.
(3) Αν $\exists f'$, επαναλαμβάνουμε το (2) για την f'.
(4) — " — $\exists f''$, — " — " — " — f''.
(5) Βρίσκουμε τις τιμές της f στις ρίζες της f' (πιθανά ακρότατα) και της f'' (πιθανά σημεία καμπής), και στο 0.
(6) Βρίσκουμε ασύμπτωτες.
(7) Συνοψίζουμε σε πίνακα.
(8) Κάνουμε γραφική παράσταση.

Παράδειγμα 1.

Να μελετηθεί η $f(x) = (x-1)(x+2)^2$

(1) Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = 0 \iff x = 1$ ή $x = -2$.

$f(x) > 0 \iff x > 1$.

(3) $f'(x) = [(x-1)\cdot(x+2)^2]' =$

$= (x-1)'(x+2)^2 + (x-1)((x+2)^2)' =$

$= 1\cdot(x+2)^2 + (x-1)\cdot 2(x+2)\cdot(x+2)' =$

$= (x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) =$

$= (x+2)(x+2+2x-2) = (x+2)\cdot 3x$

Παρατηρούμε ότι:

$f'(x) = 0 \iff x = -2$ ή $x = 0$, και

$f'(x) < 0 \iff -2 < x < 0$.

(4) $f''(x) = [3x^2 + 6x]' = 6x + 6$.

$f''(x) = 0 \iff x = -1$.

$f''(x) > 0 \iff x > -1$.

(5) $f(-1) = -2$

$f(0) = -4$.

(6) Αφού η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Υπολογίζουμε τα όρια:

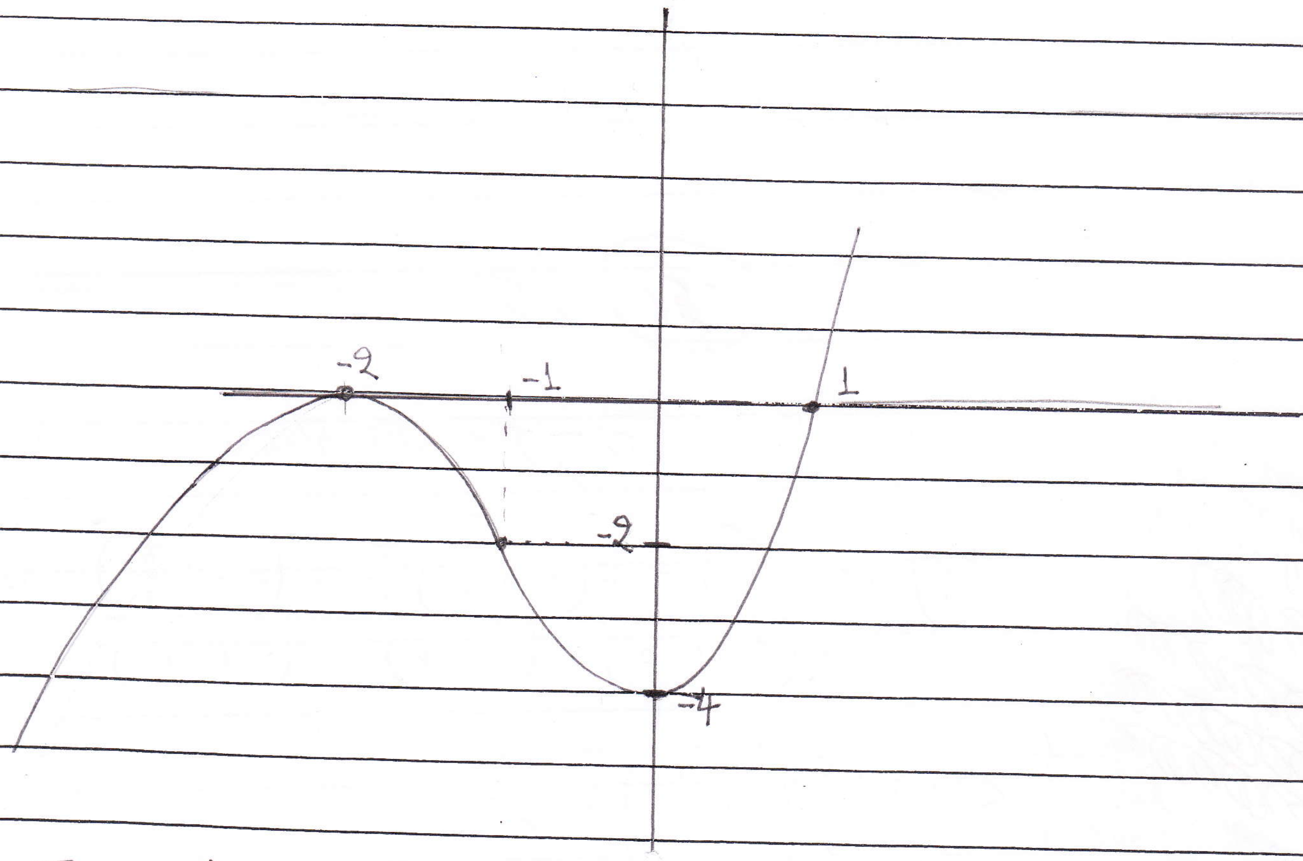
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (1-1/x)\cdot(x+2)^2 = (1-0)(+\infty) = +\infty,$$

άρα δεν υπάρχει πλάγια/οριζόντια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$.

(7)

		-2		-1		0		1	
f	$-$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f''	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
		ρίζα, τοπ. max		σ.κ		τοπ. min		ρίζα	

(8) Σκαρίφημα της γρ. παράστασης:



Παρατήρηση: Από τα όρια στο $\pm\infty$ και την συνέχεια της f συνάγεται ότι το πεδίο τιμών της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί η $f(x)=x+\frac{1}{x}$

(1) Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}-\{0\}$.

(2) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}=0$, αδύνατον.

$f(x)=\frac{x^2+1}{x}>0 \Leftrightarrow x>0$.

(3) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

(4) $f''(x)=\frac{(x^2-1)'x^2-(x^2-1)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$

$f''(x)\neq 0 \quad \forall x\neq 0$.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$.

(5) $f(-1)=-2, \quad f(1)=2$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \Rightarrow$ η κατακόρυφη ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\frac{1}{x^2}=1=\alpha\in\mathbb{R}$.

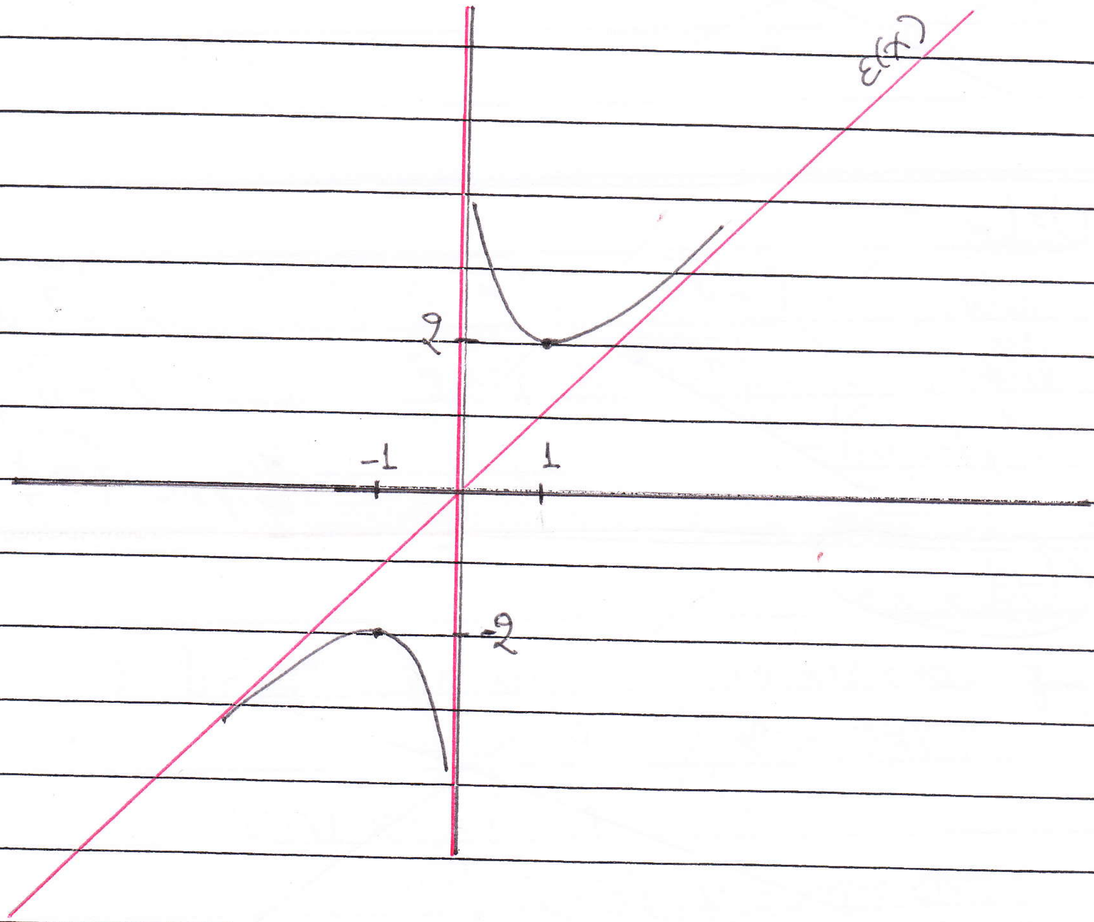
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-\alpha x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0=\beta\in\mathbb{R}$.

Άρα η ευθεία $\varepsilon(x)=\alpha x+\beta=1x+0=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

(7)

		-1		0		1	
f	$-$		$-$	$*$	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
f''	$-$		$-$	$*$	$+$		$+$
	↗	Τοπ. max	↘		↘	Τοπ. min.	↗

(8) Σκαρίφημα της γρ. παράστασης:



Παρατηρήσεις: − Με κόκκινο σημειώνονται οι ασύμπτωτες.

− Η f είναι περιττή ($\therefore$ σχήμα συμμετρικό ως προς κέντρο το 0)

− Όπως φαίνεται από τα όρια της f στα $-\infty$, 0^-, 0^+, $+\infty$ και από τα τοπικά ακρότατα $f(-1)=-2$ και $f(1)=2$, το πεδίο τιμών είναι το $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.

Παράδειγμα 3

Να μελετηθεί η $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

(1) Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

(3) $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x^3 - 2) \cdot x^3 > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > \sqrt[3]{2}$.

(4) $f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$

(5) $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cong 1{,}8$

(6) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1 + 0 = 1 = \alpha \in \mathbb{R}$

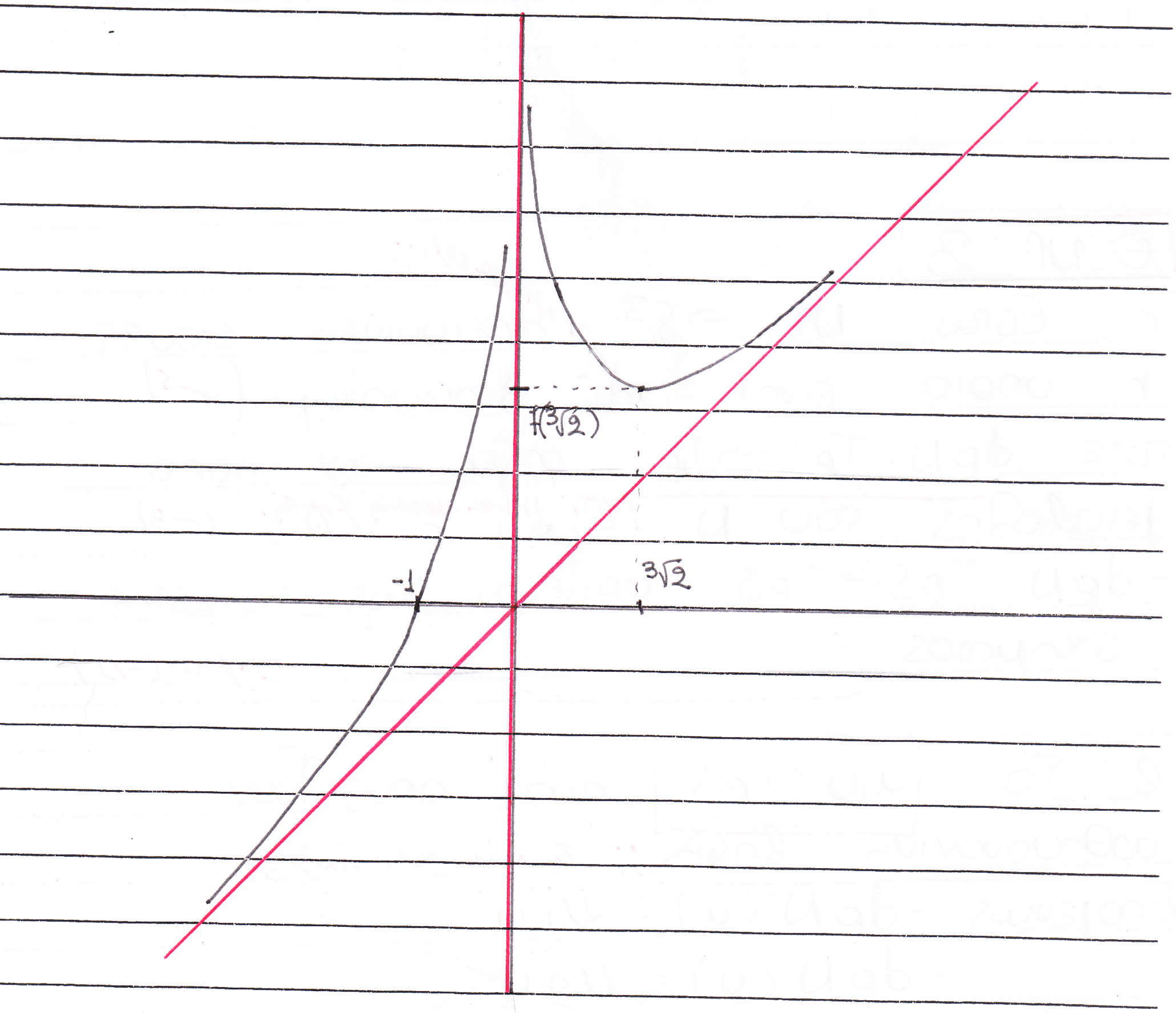
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x) = \lim \frac{1}{x^2} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$.

Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x = 0$ είναι ασύμπτωτη στο 0 και η $\varepsilon(x) = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$.

(7)

	-1		0		$\sqrt[3]{2}$	
f	$-$	0 $+$	$*$	$+$		$+$
f'	$+$	$+$	$*$	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$*$	$+$		$+$
	↗	ρίζα ↗		↘	τοπ. min	↗

(8) Σκαρίφημα της γρ. παράστασης:



Παρατήρηση: Από την συνέχεια της f στο $(-\infty,0)$ και επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, προκύπτει ότι το πεδίο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4

Να μελετηθεί η $f(x)=\ln(1+x^2)$.

(1) Επειδή $1+x^2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, υπάρχει ο αντίστοιχος $\ln$ που η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

(2) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$

$f(x)>0 \Leftrightarrow 1+x^2>1 \Leftrightarrow x\neq 0$.

(3) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$.

(4) $f''(x)=\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

(5) $f(-1)=f(1)=\ln 2$

(6) Δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\overset{\text{dlH}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\ln(1+x^2))'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

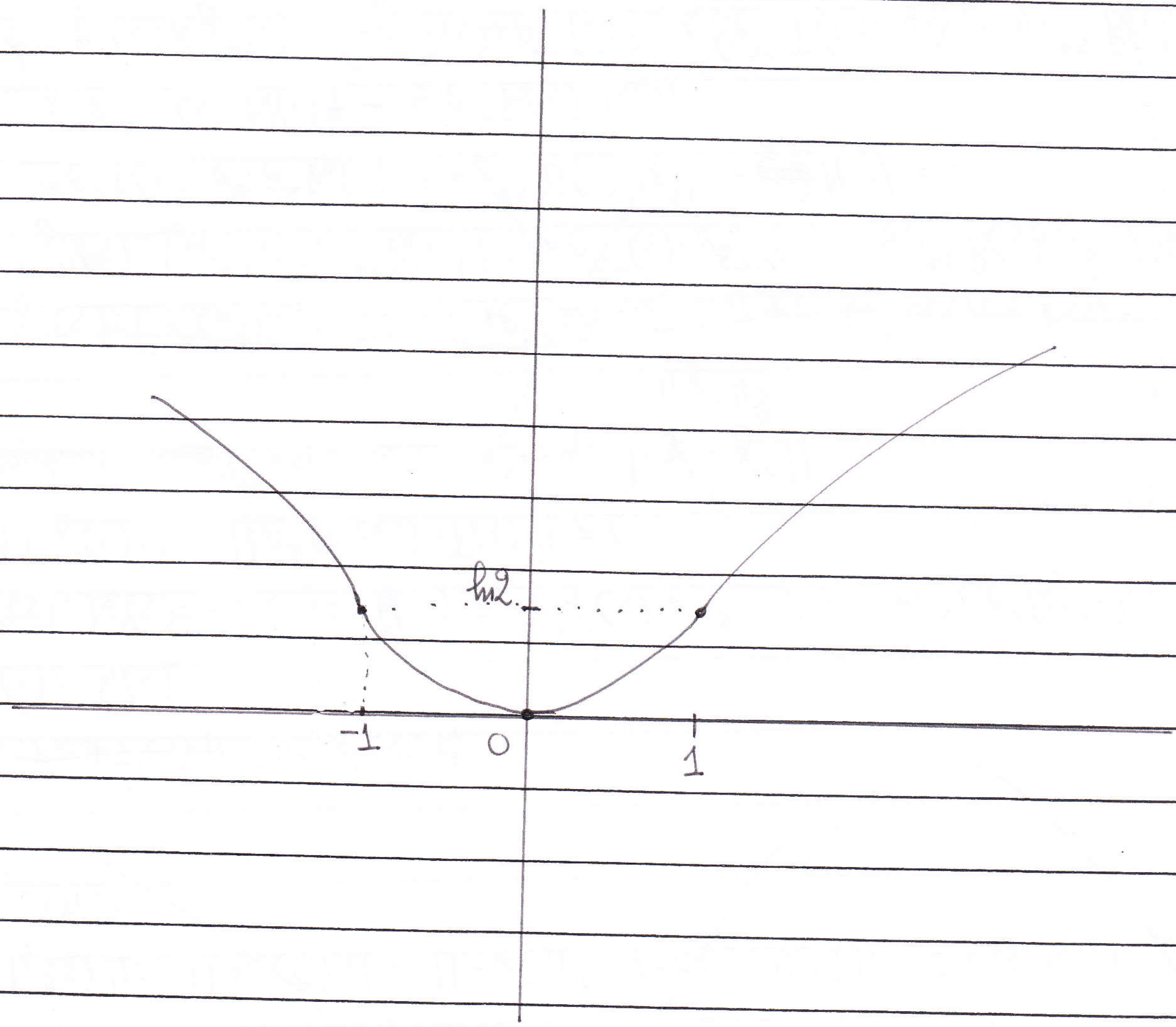
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-0=+\infty$, άρα $\nexists$ ασύμπτωτη στο $\pm\infty$,

αφού για την $\varepsilon(x)=\alpha x+\beta$ είναι $\alpha=0$ αλλά $\beta=+\infty$.

(7)

x		-1		0		1	
f	$+$		$+$	0	$+$		$+$
f'	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
		σ.κ.		ρίζα τοπ. min		σ.κ	

(8)



Παρατήρηση. Η f είναι άρτια.

Παράδειγμα 5

Να μελετηθεί η $f(x) = \cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (υπερβολικό συνημίτονο)

(1) Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{>0} = \underbrace{-e^{-x}}_{<0}$, αδύνατον.

$f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(3) $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

(4) $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

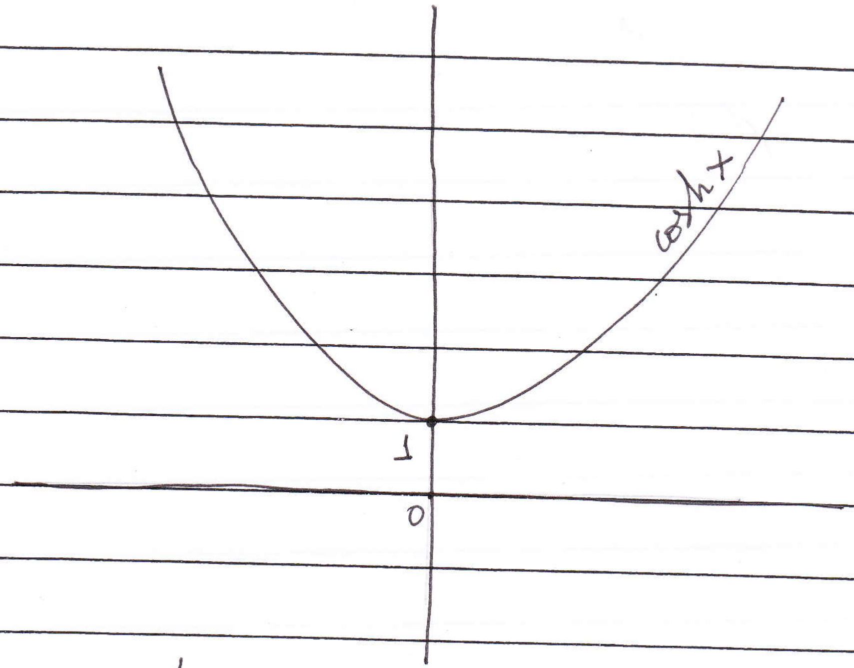
(5) $f(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$.

(6) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x} \overset{dLH}{=} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty$

(7)

		0	
cosh = f	+	1	+
f'	−	0	+
f''	+		+
	↘	(ολικό) min	↗

(8)



Παρατ: η $\cosh x$ είναι άρτια με πεδίο τιμών το $[1,+\infty)$

Παράδειγμα 6

Να μελετηθεί η $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

(υπερβολικό ημίτονο)

Παρατηρώντας το προηγούμενο παράδειγμα, βλέπουμε ότι $(\sinh)'(x) = (\cosh)(x)$ και $(\cosh)'(x) = (\sinh)(x)$.
Άρα έχουμε:

(1) πεδίο ορσ: $\mathbb{R}$

(2) $\sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\sinh x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

(3) $(\sinh)'(x) = \cosh x \quad 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

(4) $(\sinh)''(x) = \sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $(\sinh)''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

(5) $\sinh 0 = 0$.

(6) $\nexists$ ασύμπτωτες (ανάλογη μελέτη)

(7)		0	
$\sinh = f$	$-$	0	$+$
f'	$+$		$+$
f''	$-$	0	$+$
	↗	ρίζα σ.κ.	↗