1

I

p: f είναι "1-1".

$\forall x_1, x_2$ με $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

$\overline{p}$: η f δεν είναι "1-1".

$\exists x_1, x_2$ με $x_1 \neq x_2$ έτσι ώστε $f(x_1) = f(x_2)$

$$p \Rightarrow q \overset{\text{λογικά}}{\Longleftrightarrow} \overline{p} \overset{(\text{ή})}{\vee} q$$

$$\overline{p \Rightarrow q} \Longleftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} = p \wedge \overline{q}$$

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Είναι ένας κανόνας με τον οποίον μπορούμε να κάνουμε αποδείξεις προτάσεων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς.

π.χ. ν.δ.ο $n^2 \geq n$, $\forall n \geq 0$.

$0^2 \geq 0$ ✓ $1^2 \geq 1$ ✓ $2^2 = 4 \geq 2$ ✓ ($\geq$: $>$ ή $=$)

$3^2 = 9 \geq 3$ περιμ. ότι θα ισχύει $\forall n$.

δείχνουμε αρχικά ότι για $n=0$ είναι αληθής η ανισότητα (ισχύ

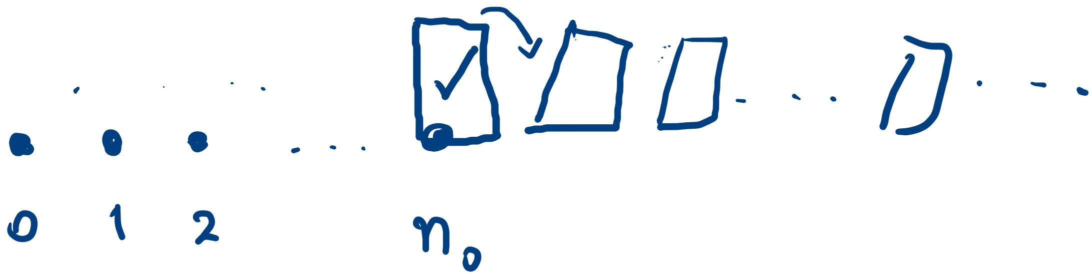
- $n=0$ ισχύει.
- έστω ότι ισχύει για n. θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$ } $\Rightarrow$ επαγωγή

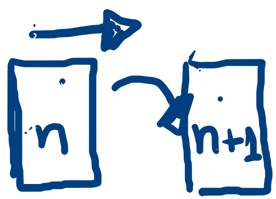
ότι τότε θα ισχύει $\forall n \geq 0$

$\boxed{n_0}$

έστω $n_0 \in \mathbb{N}$.

αλήθεια για το $1^{ο}$ στοιχείο (B1).





αν το n είναι αληθές, τότε και το $n+1$ ισχύει

αν το "ντόμινο" n, το σπρώξουμε, τότε το ντόμινο "$n+1$" θα πέσει.

[Άρα θα πέσουν όλα τα ντόμινο από το n_0 και πέρα.

2 Ισοδύναμες διατυπώσεις

1. B1: Δείχνουμε ότι $P(n_0)$ είναι αληθής.
   B2: Δείχνουμε ότι Αν $P(n)$ αληθής, τότε $P(n+1)$ αληθής

Αν B_1, B_2 ισχύουν τότε $P(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq n_0$.

2. B1: Δείχνουμε ότι $P(n_0)$ είναι αληθής
   B2: Δείχνουμε ότι Αν $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$, είναι αληθής
   Τότε $P(n+1)$ αληθής

Αν B_1, B_2 ισχύουν, Τότε $P(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq n_0$.

Παράδειγμα

(1) $n^2 \geq n \quad , \forall n \geq 0 .$

Επαγωγή

$n = 0 \quad , \quad 0^2 \geq 0$ ✓ ισχύει.

αν ισχύει για n , θ.δ.ο ισχύει για $n+1$.

πρέπει ν.δ.ο. $(n+1)^2 \geq n+1$ (αντικαθιστούμε όπου $n \longrightarrow n+1$)

ή $n^2 + 2n + \cancel{1} \geq n + \cancel{1}$

ή $n(n+1) \geq 0$

Πράγματι $n \geq 0$ και $n+1 \geq 0 \Longrightarrow$

$n(n+1) \geq 0$ [Το $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$]

2 Ν.δ.ο.

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Αποδ</u>:

• Για $n=1$, $1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ ✓

• Έστω ότι ισχύει για n. Θα το δείξουμε για $n+1$.
Πρέπει ν.δ.ο.

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Έχουμε

$$1+2+\dots+n+(n+1) = (1+2+\dots+n)+(n+1)$$

υποθ. επαγ.

$$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) =$$

$$(n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ασκήσεις.

① Ν.δ.ο. $1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n\geq 1$

② Ν.δ.ο. $1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $\forall n\geq 1$.

Επαγωγή.

- Ξεκινάμε ότι είναι πράγματι αληθές για το n_0.
- υποθέτ. ότι ισχύει για n $\Longrightarrow$ ισχύει για $n+1$

n_0 ισχύει $\xRightarrow{\beta 2}$ n_0+1 ισχύει $\Longrightarrow$ n_0+2 ισχύει $\Longrightarrow \dots$ ισχύει $\forall n\geq n_0$.

Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών

Ορσ: Ακολουθία πραγματικών αριθμών ή πραγματική ακολουθία λέμε κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Αντί να γράφουμε $a(n)$, γράφουμε a_n και η ακολουθία συμβολίζεται με (a_n).

Ο n-οστός όρος της ακολουθίας είναι ο a_n.

Παραδείγματα

1. Τη σταθερή ακολουθία, δηλ. $a_n = c$, $\forall n \geq 0$
2. η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$: έχει νόημα για $n \geq 1$.
   $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

3. Η ακολουθία (e^n)

$$e^0 = 1, \ e^1 = e, \ e^2, \ e^3, \ \dots$$

4. Η ακολουθία $((-1)^n)$.

$n=0$: $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

<u>Ορσ</u>: Μία πραγματική ακολουθία (a_n), λέγεται

(i) <u>αύξουσα</u>, αν $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Συμβολίζεται με $(a_n) \nearrow$

(ii) <u>γνησίως αύξουσα</u>, αν $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Συμβ. με $(a_n) \nearrow$

(iii) φθίνουσα, αν $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n$ (10)

∴ Συμβ. με $(a_n)\downarrow$

(iv) γνησίως φθίνουσα, αν $a_{n+1} < a_n$, $\forall n$.

Συμβ. με $(a_n)\not\searrow$.

(v) μονότονη, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα

(vi) γνησίως μονότονη, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Παρατ.

Η σταθερή ακολουθία είναι ταυτόχρονα αύξουσα & φθίνουσα.

Έλεγχος Μονοτονίας

Υπάρχουν 2 βασικές μέθοδοι ελέγχου:

1. Ελέγχουμε το πρόσημο της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n \begin{cases} \geq 0, \ \forall n \iff a_{n+1} \geq a_n \iff (a_n) \nearrow \\ \leq 0, \ \forall n \iff a_{n+1} \leq a_n \iff (a_n) \searrow \end{cases}$$

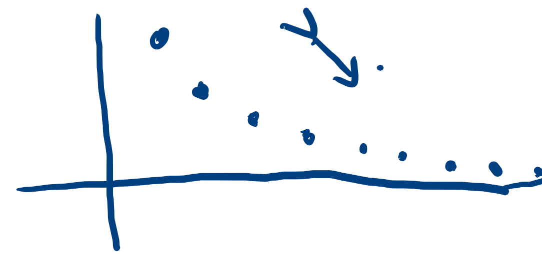
$$\& \begin{cases} > 0, \ \forall n \iff a_{n+1} > a_n \iff (a_n) \nearrow \\ < 0, \ \forall n \iff a_{n+1} < a_n \iff (a_n) \searrow \end{cases}$$

② Για $a_n > 0$ (για θετικές ακολουθίες)

ελέγχουμε το πρόσημο του πηλίκου $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} \geq 1 \iff a_{n+1} \geq a_n \iff (a_n) \nearrow \\ \leq 1 \iff a_{n+1} \leq a_n \iff (a_n) \searrow \end{cases}$$

$$\text{ή} \begin{cases} > 1 \iff a_{n+1} > a_n \iff (a_n) \text{ γν} \nearrow \\ < 1 \iff a_{n+1} < a_n \iff (a_n) \text{ γν} \searrow \end{cases}$$



Παραδείγματα

1. (a_n) με $a_n = 3n + (-1)^n$, $n \geq 0$.

Η ακολουθία αυτή είναι γνησίως αύξουσα

$$(1, \overset{+5}{2, 7}, \overset{+1}{8}, \dots)$$

Θ.δ.ο. $a_{n+1} > a_n \iff a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n$$

$$= 3 + (-1)^n(-1-1) = 3 - 2\cdot(-1)^n$$

$$\begin{cases} 5, & n \text{ περιττός} \\ 1, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

> 0, $\forall n$ ✓

2 Η ακολ. (a_n) με $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 0$.

Η $(a_n) \searrow$.

Αποδ.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow (a_n) \searrow$.

15

<u>Ορσ</u>: Μια ακολουθία (a_n) λέγεται

(i) <u>άνω φραγμένη</u>, αν $\exists$ κάποιο $b \in \mathbb{R}$:

$$a_n \leq b \quad , \text{για κάθε } n.$$

$\hookrightarrow$ κανένας όρος της ακολ. δεν μπορεί να υπερβεί το b.

Ο b είναι ένα <u>άνω φράγμα</u> της (a_n).

(ii) <u>κάτω φραγμένη</u>, αν $\exists$ κάποιο $a \in \mathbb{R}$:

$$a \leq a_n \quad , \text{για κάθε } n.$$

$\hookrightarrow$ κανένας όρος της ακολ. δεν μπορεί να βρεθεί κάτω από το a.

Ο a είναι ένα <u>κάτω φράγμα</u> της (a_n).

(16)

(iii) <u>φραγμένη</u>, αν είναι άνω & κάτω φραγμένη, δηλ. $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq a_n \leq b$, για κάθε n.

[όλοι οι όροι της ακολ. βρίσκονται ανάμεσα στο a και στο b]

<u>Παρατηρήσεις</u>

— Μια ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη $\Longleftrightarrow$ $\exists M > 0$: $|a_n| \leq M$, για κάθε n.

[$\Rightarrow$) $a \leq a_n \leq b \rightarrow$ παίρνουμε $M = \max(|a|, |b|)$, τότε $|a_n| \leq M$
$\Leftarrow$) $|a_n| \leq M \Longleftrightarrow -M \leq a_n \leq M$]

— Τα φράγματα δεν είναι μοναδικά καθορισμένα. Αντίθετα, αν υπάρχουν θα είναι άπειρα $|a_n| \leq 3 \Rightarrow |a_n| \leq M, \forall M \geq 3$

Παραδείγματα

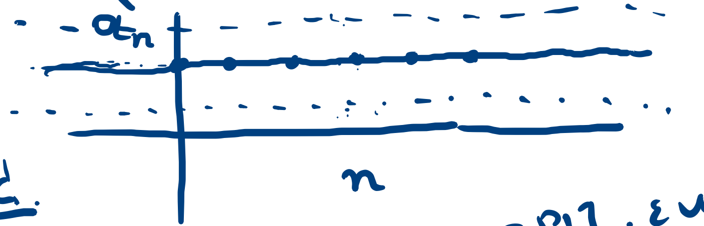
(1) $a_n = c$, $n \geq 0$. (σταθερή ακολουθία).

Είναι προφανώς φραγμένη (άνω και κάτω)

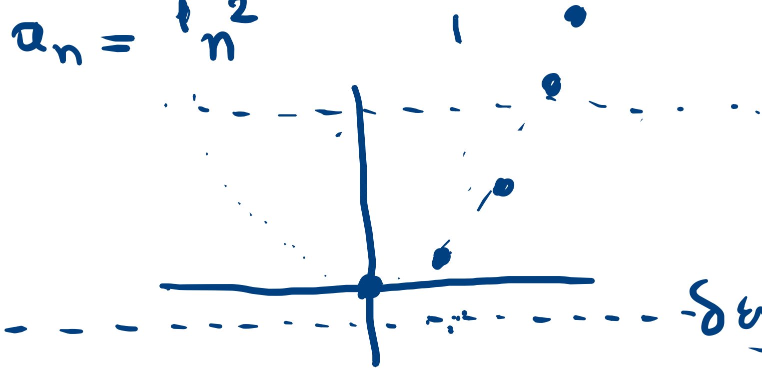
, αφού $|a_n| = c$

$\downarrow$

$M = c$.



(2) $a_n = n^2$



οποία οριζ. ευθεία και να βάλω οι όροι της θα την υπερβών

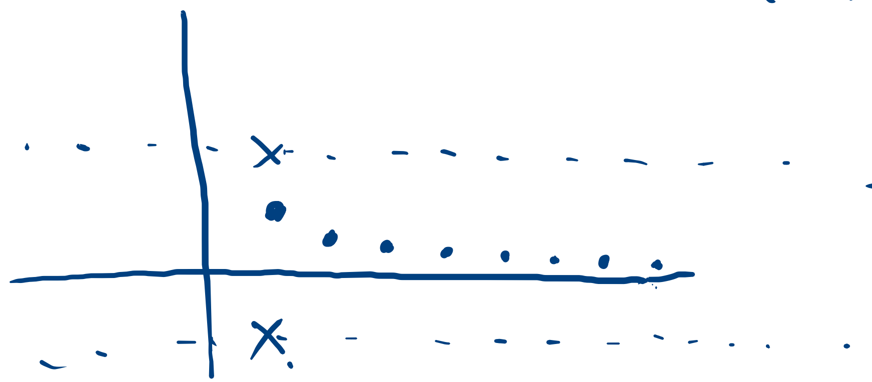
δεν είναι άνω φραγμένη

Είναι κάτω φραγμένη, διότι $a_n \geq 0$, για κάθε n.

Βρίσκουμε μια ευθεία που ή $a_n \geq -1$ ($> \frac{1}{n} =$)

όλοι οι όροι της αυτής. Είναι πάνω από αυτήν.

(iii) $a_n = \frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{n}\right)\downarrow$.



φραγμένη

$\frac{1}{n} \leq 1$ $(\Leftarrow n \geq 1)$.

↳ άνω φράγμα.

$\frac{1}{n} \geq 0$ $\left(\frac{1}{n} > 0\right)$.

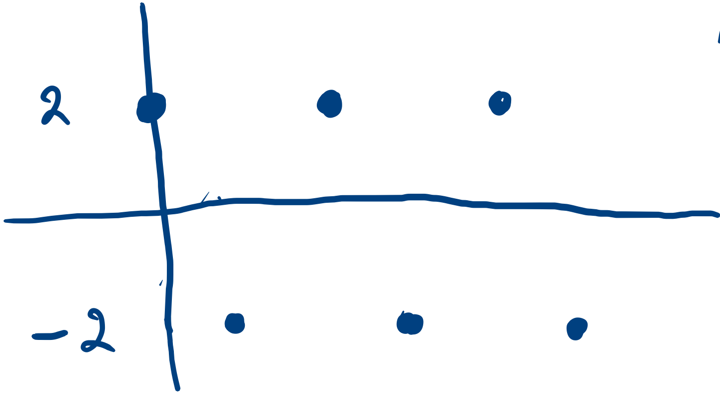
κάτω φράγμα

$\Longrightarrow$ άνω + κάτω φραγμένη

άρα φραγμένη.

$|a_n| = a_n = \frac{1}{n} \leq \underset{M}{\underset{\parallel}{1}}$ $(M=1)$

(iv) $a_n = 2\cdot(-1)^n$, $n \geq 0$.



Έχουμε $|a_n| = 2\cdot\underbrace{|-1|^n}_{=1} = 2$ $\Rightarrow$ φραγμένη.

Άσκηση

Ν.δ.ο. η (a_n) με $a_n = \dfrac{n^2+2n\sin(3n)}{n^2+5n+4}$ είναι φραγμένη

($\eta\mu x \equiv \sin x$, $\sigma\upsilon\nu x \equiv \cos x$)

Λύση

$|x+y| \leq |x|+|y|$

$$|a_n| = \left|\frac{n^2+2n\sin(3n)}{n^2+5n+4}\right| = \frac{|n^2+2n\sin(3n)|}{n^2+5n+4} \leq \frac{n^2+2n\overbrace{|\sin 3n|}^{\leq 1}}{n^2+5n+4}$$

20

$$|a_n| \le \frac{n^2+2n}{n^2+5n+4} < \frac{n^2+5n+4}{n^2+5n+4} = 1$$

Τελικά η (a_n) είναι φραγμένη.

<u>Παρατήρηση</u>

- Αν μια ακολ. (a_n) είναι <u>αύξουσα</u>, είναι <u>κάτω φραγμένη</u> από τον πρώτο της όρο,
$a_{n+1} \geq a_n \geq a_0$ (ή a_1, αν ξεκινά για $n \geq 1$)
$\hookrightarrow$ κάτω φράγμα

- Αν μια ακολ. (a_n) είναι φθίνουσα, είναι άνω φραγμένη από τον πρώτο της όρο
$a_{n+1} \leq a_n \leq a_0$ (ή a_1 αν ξεκινά για $n \geq 1$)
$\hookrightarrow$ άνω φράγμα

Άσκηση 21

Ν.δ.ο. η (a_n) με $a_n = \frac{n}{3^n}$, $\forall n \geq 1$ είναι φραγμένη.

Λύση.

κατ' αρχήν $a_n > 0$, άρα είναι κάτω φραγμένη

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{3n} \leq \frac{n+n}{3n} = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} < 1$$

Άρα η $(a_n) \downarrow$ και άρα το $a_1 = \frac{1}{3}$ είναι άνω φράγμα π.χ.

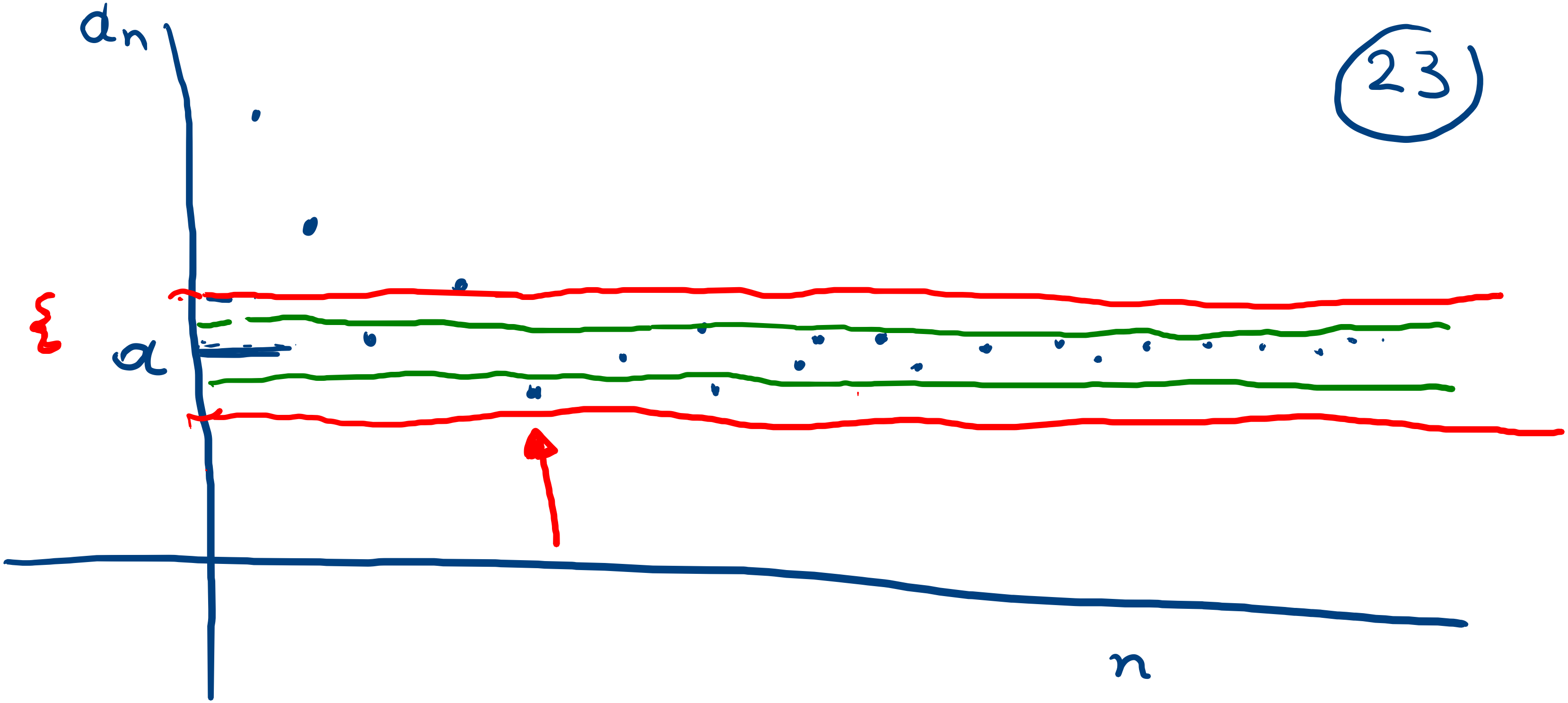
* $\dfrac{n}{3^n}$. (επαγωγικά) → $n \leq 3^n \iff \dfrac{n}{3^n} \leq 1$ ✓

<u>Ορσ</u>: Έστω (a_n) μια πραγμ. ακολ. και $a \in \mathbb{R}$.
Λέμε ότι η (a_n) <u>συγκλίνει</u> στο a (καθώς $n \to \infty$)
ή ότι το a είναι όριο της (a_n), αν

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \;,\; \forall n \geq n_0.$$

Τότε γράφουμε ότι $a_n \longrightarrow a$, $n \to \infty$ ή

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ $\left(a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \right)$



$a_n \to \alpha$. Το α πρέπει να είναι ένας αριθμός στον οποίο οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν όλο και περισσότερο.

Παρατήρηση

Αν $a_n \to a$, τότε για κάθε δεδομένη απόσταση $\varepsilon > 0$, όλοι οι όροι της ακολουθίας θα βρεθούν "τελικά" (από κάποιο n_0 και πάνω) μέσα στο διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$$\left[\, |a_n - a| < \varepsilon \,, \text{ τελικά } \forall n \,\right]$$

- Σε μια σύγκλιση δεν μας ενδιαφέρουν οι αρχικοί όροι της ακολουθίας.

Παραδείγματα

① Αν $a_n = c$, τότε προφανώς
$$a_n \longrightarrow c.$$

[στην αποδ. $\underline{\forall \varepsilon > 0}$, $\exists n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$]

Έστω $\underline{\varepsilon > 0}$ (θα δείξουμε ότι για το τυχόν $\varepsilon > 0$ $|a_n - a| < \varepsilon$ τελικά $\forall n$)

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \checkmark$$

[εδώ $a_n = c$, $\forall n \geq 1$]

② η $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$. θ.δ.ο. $a_n \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.

πρέπει $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ τελικά $\forall n$.

$|a_n| < \varepsilon$ ή $\overset{(\iff)}{}$ $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ ή $\overset{(\iff)}{}$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$

ή $n > \frac{1}{\varepsilon}$. $\left(x < y \overset{x,y>0}{\iff} \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right)$

θέτουμε n_0 οποιοσδ. μεγαλύτερος φυσικός τ.ου $\frac{1}{\varepsilon}$.

$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ αν π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{100.5}$

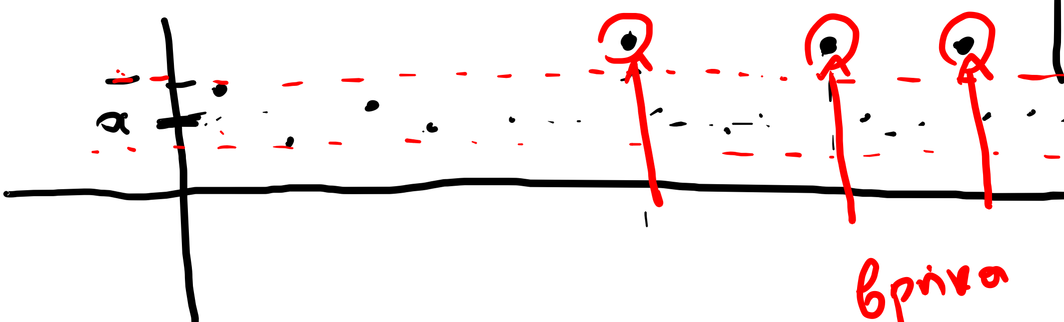
Αν $n \geq n_0$, τότε. τότε $\frac{1}{\varepsilon} = 100.5 \Rightarrow [100.5] = 100$

$100 + 1 = 101$.

$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

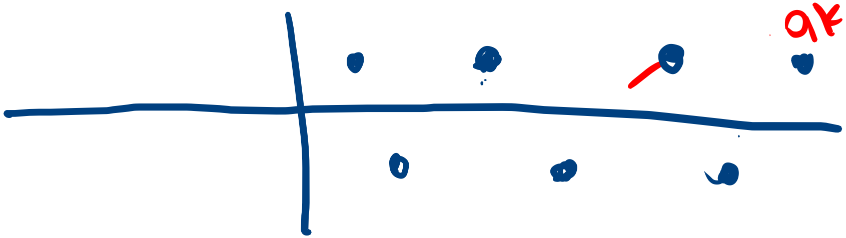
$$a_n \to a \overset{ορσ}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

$$a_n \not\to a \iff \exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k_n \geq n : |a_{k_n} - a| \geq \varepsilon.$$



βρήκα μια ζώνη που συστηματικά βλέπω όρους της ακολουθίας να βγαίναν εκτός από αυτήν.

Παράδειγμα



$$a_n = (-1)^n$$

για κανένα a δεν έχουμε $a_n \to a$.

6