Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
Ενότητα 3
Επίλυση π.α.π.
Η μέθοδος κλάδος-φράγμα

Γιάννης Δημητρακόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Δ.Π.Μ.Σ. Μαθηματικά της αγοράς και της Παραγωγής

Σάββατο 10 Οκτωβρίου 2020

Η μέθοδος κλάδος-φράγμα - Ιδέα

- Η μέθοδος κλάδος-φράγμα συνίσταται στην επίλυση ενός μεγάλου αριθμού π.γ.π. για την επίλυση ενός π.α.π.
- Η μέθοδος αρχίζει λύνοντας την χ.γ.π. ενός π.α.π. ευελπιστώντας ότι η λύση θα ικανοποιεί και τους περιορισμούς ακεραιότητας.
- Αν αυτό συμβεί τότε έχει βρεθεί η λύση του π.α.π.
- Αν όχι επιλέγεται μια μεταβλητή για την οποία παραβιάζεται ο περιορισμός ακεραιότητας και η χ.γ.π. σπάει σε δυο προβλήματα.
- Λύνονται οι αντίστοιχες χ.γ.π. κ.ο.κ.

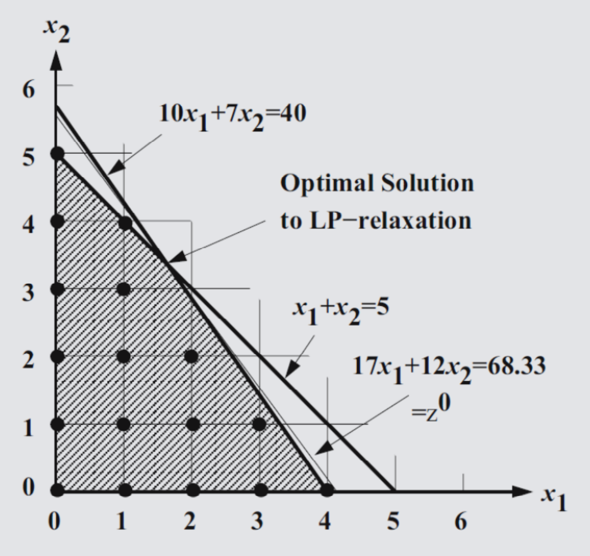
Παράδειγμα

- Να λυθεί το π.α.π.

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 17x_1 + 12x_2 & & \\
\text{υπό} & 10x_1 + 7x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. &
\end{array}$$

- Η χ.γ.π. είναι η

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 17x_1 + 12x_2 & & \\
\text{υπό} & 10x_1 + 7x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$



x_2
6
5
4
3
2
1
0
$10x_1+7x_2=40$
Optimal Solution
to LP−relaxation
$x_1+x_2=5$
$17x_1+12x_2=68.33$
$=z^0$
0
1
2
3
4
5
6
x_1

Παράδειγμα - Αρχική χ.γ.π.

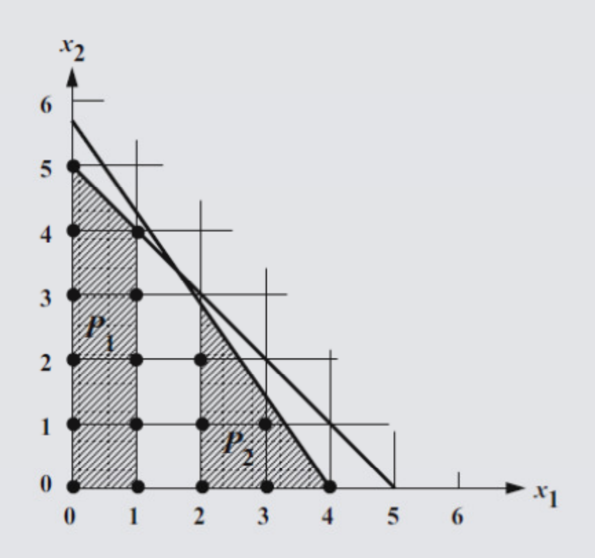
- Η χ.γ.π. έχει βέλτιστη λύση την $(x_1, x_2) = (5/3, 10/3)$.
- Η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής είναι $\zeta_0 = 205/3 = 68.33$.
- Δεν είναι καλή ιδέα να στρογγυλοποιήσουμε τη λύση της χ.γ.π. για να πάρουμε τη βέλτιστη λύση στο π.α.π.
- Εδώ η στρογγυλοποίηση δίνει $(x_1, x_2) = (2, 3)$ που δεν είναι καν εφικτή.
- Ούτε είναι καλή ιδέα να βρούμε την κοντινότερη ακέραια λύση στην λύση της χ.γ.π.
- Εδώ η κοντινότερη ακέραια λύση στη λύση της χ.γ.π. είναι η $(x_1, x_2) = (1, 3)$ που δεν είναι βέλτιστη.

Παράδειγμα - Σχόλια

- Από την γραφική επίλυση είναι φανερό ότι η βέλτιστη λύση του π.α.π. είναι η $(1,4)$ ή η $(4,0)$.
- Τελικά, η βέλτιστη λύση του π.α.π. είναι η $(4,0)$ που είναι πολύ μακριά από τη βέλτιστη λύση της χ.γ.π. $(5/3, 10/3)$.

Παράδειγμα - Διακλάδωση σε υποπροβλήματα

- Έχουμε τη βέλτιστη λύση $(x_1, x_2) = (5/3, 10/3)$ της χ.γ.π. του αρχικού προβλήματος.
- Επιλέγουμε μια μεταβλητή που δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας. Έστω την $x_1 = 5/3$.
- Σπάμε το αρχικό πρόβλημα σε δυο υποπροβλήματα εισάγοντας τους περιορισμούς $x_1 \leq \lfloor 5/3 \rfloor$ και $x_1 \geq \lfloor 5/3 \rfloor + 1$ αντίστοιχα.
- Παίρνουμε έτσι δυο νέα προβλήματα P_1 και P_2.


x_2
6
5
4
3
2
1
0
P_1
P_2
0
1
2
3
4
5
6
x_1

Παράδειγμα - Το υποπρόβλημα P_1

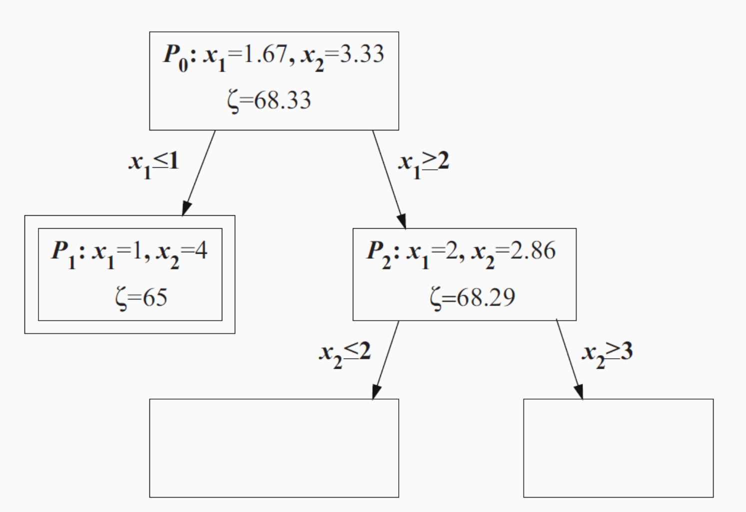
- Το αρχικό πρόβλημα P_0 με τον περιορισμό $x_1 \leq 1$ δίνει το υποπρόβλημα P_1.
- Η βέλτιστη λύση στο P_1 είναι η $(x_1, x_2) = (1, 4)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta_1 = 65$.
- Οι περιορισμοί ακεραιότητας ικανοποιούνται στη λύση αυτή.
- Η λύση αυτή καταγράφεται ως η καλύτερη λύση του π.α.π. έως τώρα.
- Το P_1 δεν χρειάζεται να διακλαδωθεί περαιτέρω.
- Η τιμή $\zeta_1 = 65$ είναι ένα κάτω φράγμα της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής του π.α.π.

Παράδειγμα - Το υποπρόβλημα P_2

- Το αρχικό πρόβλημα P_0 με τον περιορισμό $x_1 \geq 2$ δίνει το υποπρόβλημα P_2.
- Η βέλτιστη λύση στο P_2 είναι η $(x_1, x_2) = (2, 20/7)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta_2 = 478/7 = 68.29$.
- Οι περιορισμοί ακεραιότητας δεν ικανοποιούνται στη λύση αυτή.
- Αν η τιμή της αντικειμενικής ήταν μικρότερη από το καλύτερο έως τώρα φράγμα (68) τότε δεν θα χρειαζόταν να συνεχίσουμε με το P_2 και θα δηλώναμε την έως τώρα καλύτερη λύση ως βέλτιστη λύση του π.α.π.
- Επομένως το P_2 χρειάζεται περαιτέρω διακλάδωση.

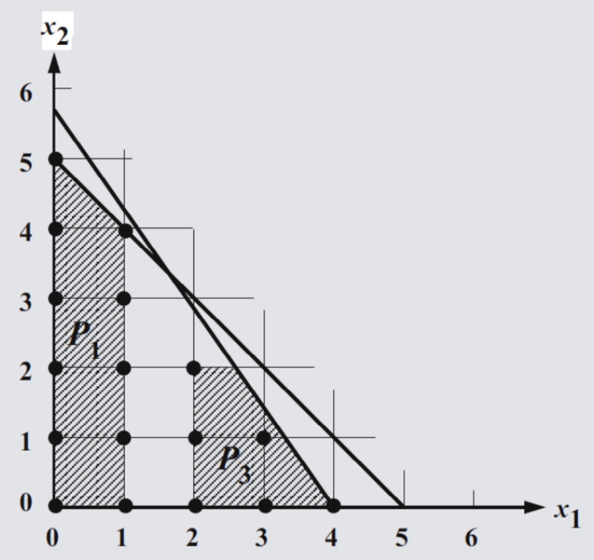
Παράδειγμα - Διακλάδωση σε υποπροβλήματα

- Έχουμε τη βέλτιστη λύση $(x_1, x_2) = (2, 2.86)$ του P_2.
- Επιλέγουμε μια μεταβλητή που δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας. Αναγκαστικά την $x_2 = 2.86$.
- Σπάμε το P_2 σε δυο υποπροβλήματα εισάγοντας τους περιορισμούς $x_2 \leq \lfloor 2.86 \rfloor$ και $x_2 \geq \lfloor 2.86 \rfloor + 1$ αντίστοιχα.
- Παίρνουμε έτσι δυο νέα προβλήματα.


$P_0: x_1=1.67, x_2=3.33$
$\zeta=68.33$
$x_1\leq 1$
$x_1\geq 2$
$P_1: x_1=1, x_2=4$
$\zeta=65$
$P_2: x_1=2, x_2=2.86$
$\zeta=68.29$
$x_2\leq 2$
$x_2\geq 3$

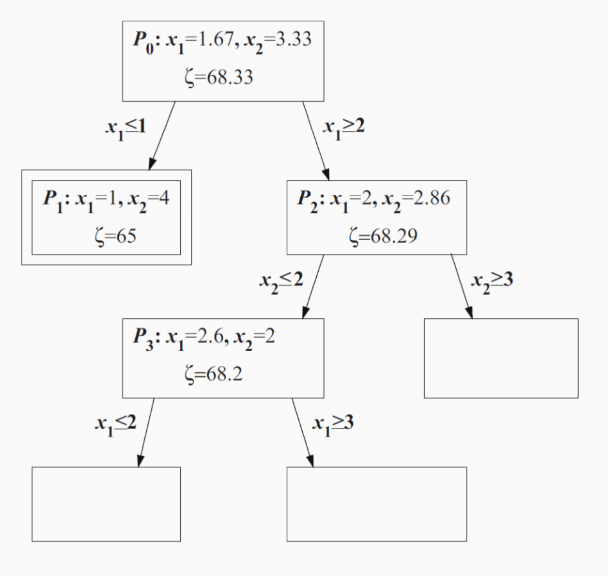
Το δέντρο της απαρίθμησης

- Το δέντρο που αρχίζει να σχηματίζεται για την επίλυση του αρχικού π.α.π. αναφέρεται ως το δέντρο απαρίθμησης της μεθόδου κλάδος-φράγμα.
- Το διπλό ορθογώνιο σε κάποιο κόμβο-ορθογώνιο του δέντρου δείχνει ότι δεν χρειάζεται περαιτέρω διακλάδωση στο αντίστοιχο σημείο, είναι κόμβος-φύλλο του δέντρου.
- Το P_1 είναι κόμβος-φύλλο.
- Το P_2 δεν είναι κόμβος-φύλλο.


x_2
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
x_1
P_1
P_3

Το υποπρόβλημα P_3

- Το πρόβλημα P_2 με τον περιορισμό $x_2 \leq 2$ δίνει το υποπρόβλημα P_3.
- Η βέλτιστη λύση στο P_3 είναι η $(x_1, x_2) = (2.6, 2)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta_3 = 68.2$.
- Οι περιορισμοί ακεραιότητας δεν ικανοποιούνται στη λύση αυτή.
- Ούτε και η τιμή της αντικειμενικής είναι μικρότερη από το καλύτερο έως τώρα φράγμα (68).
- Επομένως το P_3 χρειάζεται περαιτέρω διακλάδωση: $x_1 \leq 2$ και $x_1 \geq 3$.

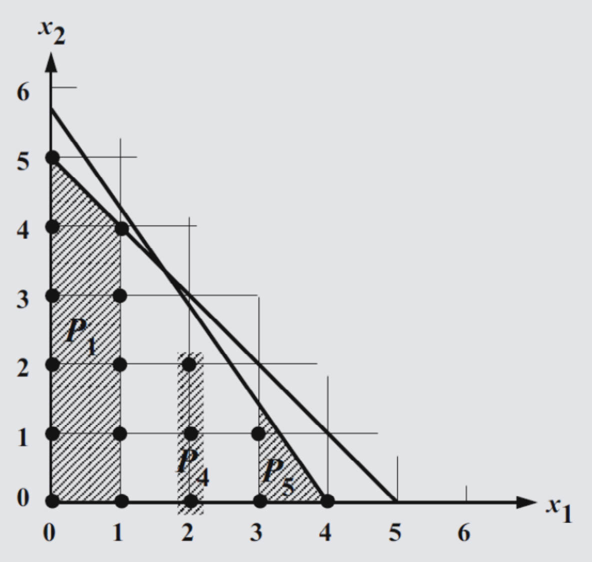

P0: x1=1.67, x2=3.33
ζ=68.33
x1≤1
x1≥2
P1: x1=1, x2=4
ζ=65
P2: x1=2, x2=2.86
ζ=68.29
x2≤2
x2≥3
P3: x1=2.6, x2=2
ζ=68.2
x1≤2
x1≥3

Παράδειγμα - Ποιόν κλάδο να επιλέξω

- Ερώτημα:
  Ποιον κλάδο συμφέρει να εξετάσουμε παρακάτω;
- Να πάμε στον δεξιό κλάδο του P_2;
- Ή στον αριστερό του P_3;
- Συμφέρει να δίνουμε προτεραιότητα στην ‘σε βάθος διερεύνηση’ (depth-first search) έναντι της ‘σε πλάτος διερεύνησης’ (breadth-first search).
- Αρά εξετάζουμε πρώτα τον αριστερό κλάδο του P_3.

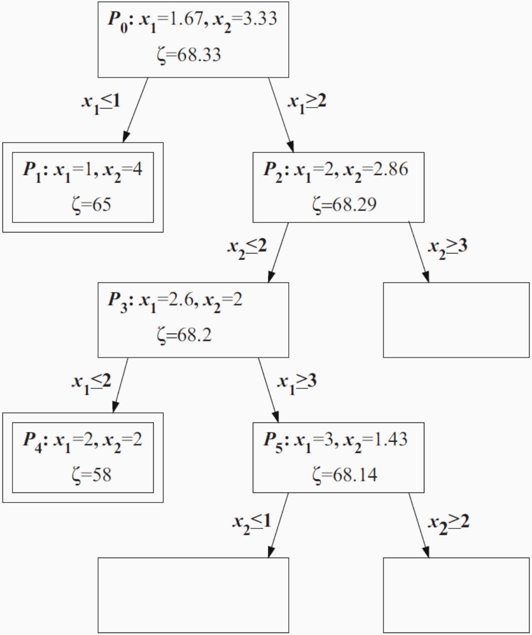
Παράδειγμα - Διακλάδωση σε υποπροβλήματα

- Έχουμε τη βέλτιστη λύση $(x_1, x_2) = (2.6, 2)$ του P_3.
- Επιλέγουμε μια μεταβλητή που δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας. Αναγκαστικά την $x_1 = 2.6$.
- Σπάμε το P_3 σε δυο υποπροβλήματα εισάγοντας τους περιορισμούς $x_1 \leq \lfloor 2.6 \rfloor$ και $x_1 \geq \lfloor 2.6 \rfloor + 1$ αντίστοιχα.
- Παίρνουμε έτσι δυο νέα προβλήματα P_4 και P_5.


x_2
6
5
4
3
2
1
0
P_1
P_4
P_5
0
1
2
3
4
5
6
x_1

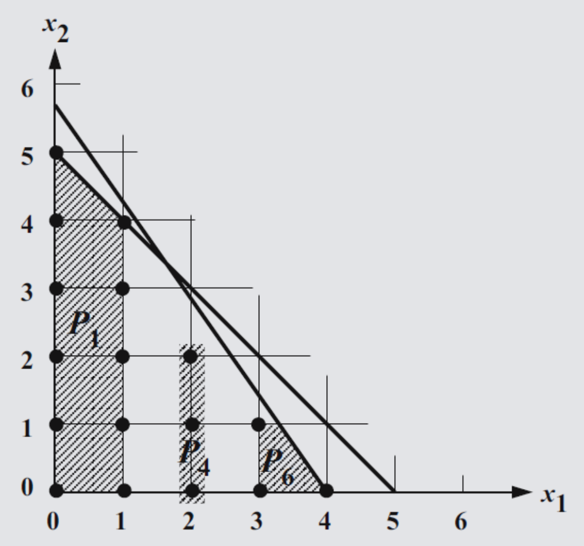
Το υποπρόβλημα P_4

- Η βέλτιστη λύση στο P_4 είναι η $(x_1, x_2) = (2, 2)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta_4 = 58$.
- Οι περιορισμοί ακεραιότητας ικανοποιούνται στη λύση αυτή.
- Όμως, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μικρότερη από το καλύτερο έως τώρα φράγμα (68), οπότε απορρίπτεται και το P_4 δεν χρειάζεται περαιτέρω διακλάδωση.
- Πάμε στο υποπρόβλημα P_5.

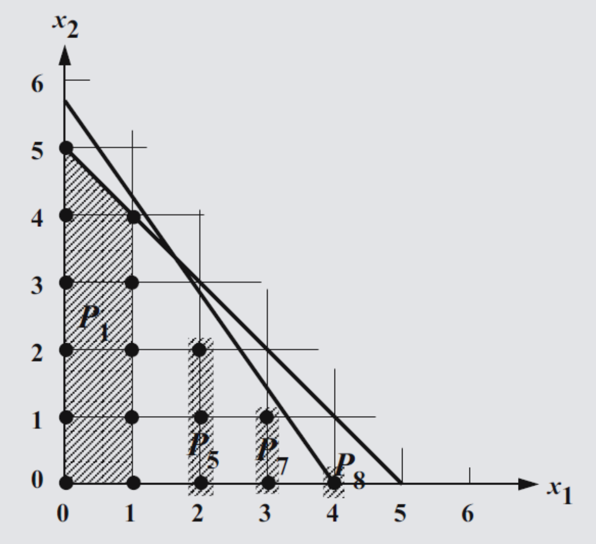

P0: x1=1.67, x2=3.33
ζ=68.33
x1≤1
x1≥2
P1: x1=1, x2=4
ζ=65
P2: x1=2, x2=2.86
ζ=68.29
x2≤2
x2≥3
P3: x1=2.6, x2=2
ζ=68.2
x1≤2
x1≥3
P4: x1=2, x2=2
ζ=58
P5: x1=3, x2=1.43
ζ=68.14
x2≤1
x2≥2

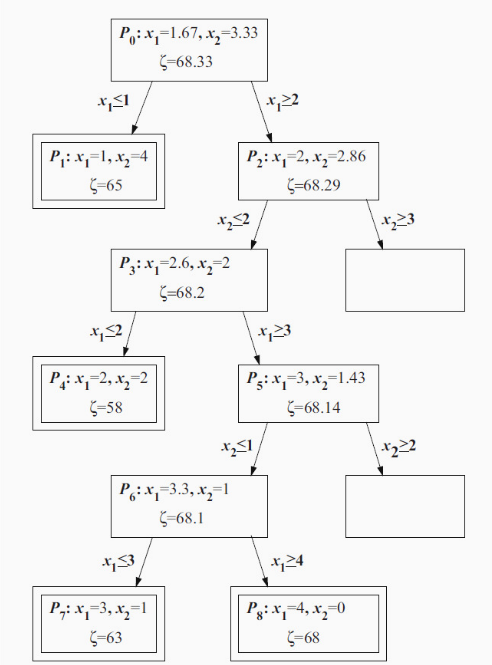
Το υποπρόβλημα P_5

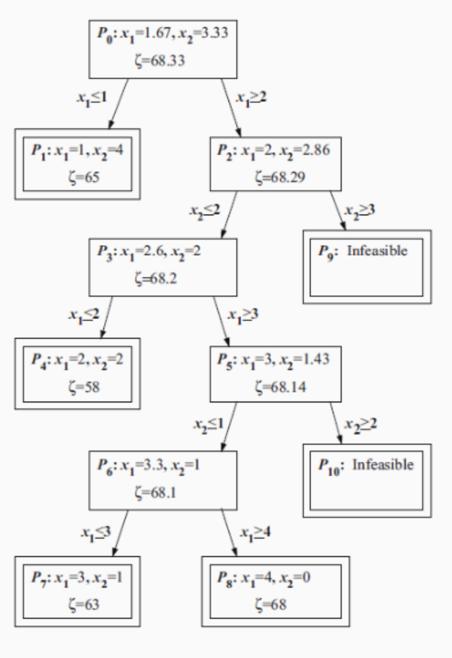
- Η βέλτιστη λύση στο P_5 είναι η $(x_1, x_2) = (3, 1.43)$ με τιμή αντικειμενικής $\zeta_5 = 68.14$.
- Οι περιορισμοί ακεραιότητας δεν ικανοποιούνται στη λύση αυτή, ούτε και η τιμή της αντικειμενικής είναι μικρότερη από το τρέχον κάτω φράγμα.
- Χρειάζεται περαιτέρω διακλάδωση.



x_2
6
5
4
3
2
1
0
P_1
P_4
P_6
0
1
2
3
4
5
6
x_1


x_2
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
x_1
P_1
P_5
P_7
P_8


P0: x1=1.67, x2=3.33
ζ=68.33
x1≤1
x1≥2
P1: x1=1, x2=4
ζ=65
P2: x1=2, x2=2.86
ζ=68.29
x2≤2
x2≥3
P3: x1=2.6, x2=2
ζ=68.2
x1≤2
x1≥3
P4: x1=2, x2=2
ζ=58
P5: x1=3, x2=1.43
ζ=68.14
x2≤1
x2≥2
P6: x1=3.3, x2=1
ζ=68.1
x1≤3
x1≥4
P7: x1=3, x2=1
ζ=63
P8: x1=4, x2=0
ζ=68


P0: x1=1.67, x2=3.33
ζ=68.33
x1≤1
x1≥2
P1: x1=1, x2=4
ζ=65
P2: x1=2, x2=2.86
ζ=68.29
x2≤2
x2≥3
P3: x1=2.6, x2=2
ζ=68.2
P9: Infeasible
x1≤2
x1≥3
P4: x1=2, x2=2
ζ=58
P5: x1=3, x2=1.43
ζ=68.14
x2≤1
x2≥2
P6: x1=3.3, x2=1
ζ=68.1
P10: Infeasible
x1≤3
x1≥4
P7: x1=3, x2=1
ζ=63
P8: x1=4, x2=0
ζ=68

Σε βάθος έναντι σε πλάτος διερεύνησης

- Η σε βάθος διερεύνηση του δέντρου απαρίθμησης είναι προτιμότερη της σε πλάτος διερεύνησης.
- 1ος λόγος: Τα σημεία που ικανοποιούν τις συνθήκες ακεραιότητας βρίσκονται βαθιά στο δέντρο.
  Αυτά δίνουν και τα φράγματα που βοηθούν στο ξεσκαρτάρισμα περιπτώσεων χωρίς περαιτέρω διακλάδωση.
- 2ος λόγος: Καθώς μετακινούμαστε βαθύτερα στο δέντρο, τα π.γ.π. προκύπτουν με προσθήκη ενός περιορισμού άνω/κάτω φράγματος μεταβλητής σε ένα ήδη λυμένο πρόβλημα.
  Επομένως μπορούμε να εκμεταλευτούμε τη λύση του ήδη λυμένου π.γ.π. και να αρχίσουμε από αυτήν για να βρούμε τη λύση του νέου π.γ.π. (με δυϊκή Simplex).