

## Ασκήσεις στην τάξη 2023

### 1 Απειρόβαθο φρέαρ

α) Να βρεθούν οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις  $\phi_n$  και ιδιοτιμές της κινητικής ενέργειας  $E_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) στο απειρόβαθο φρέαρ δυναμικού στο διάστημα  $[-d, d]$  για σωματίδιο μάζας  $\mu$ .

β) Στο πιο πάνω φρέαρ δίνεται κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x) = a(x+d)\theta(-x) - a(x-d)\theta(x),$$

όπου  $a$  μια σταθερά. Να κανονικοποιηθεί η  $\Psi$  και να βρεθεί η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας  $\langle \hat{T} \rangle_\Psi$ . Υποδείξεις:  $\theta(x) = 0$ , για  $x < 0$ ,  $= 1$ , για  $x > 0$ , και  $= 1/2$ , για  $x = 0$ .  $\theta'(x) = \delta(x)$ .

γ) Να βρεθεί η πιθανότητα μέτρησης της ιδιοτιμής  $E_n$  εάν το σύστημα βρίσκεται στην ως άνω  $\Psi(x)$ .

### 2 Ελάχιστο κυματοπακέτο

α) Υπό τις συνθήκες  $\langle \hat{p} \rangle_\Psi = 0$  και  $\langle \hat{x} \rangle_\Psi = 0$ , να βρεθεί η μορφή της  $\Psi(x)$  που ικανοποιεί  $(\Delta x)(\Delta p) = \hbar/2$ .

β) Να βρεθεί το δυναμικό για το οποίο η  $\Psi$  είναι ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής.

### 3 Διατήρηση ενέργειας

Σωματίδιο βρίσκεται στη θεμελιώδη στάθμη απειρόβαθου φρέατος. Τη στιγμή  $t = 0$  σβήνει απότομα το δυναμικό (μεταβάλλεται στο σταθερό δυναμικό  $V(x) = 0$ ). Να βρεθεί η μέση τιμή της ενέργειας για  $t > 0$ .

## 4 Χρονική εξέλιξη κυματοσυνάρτησης

Σωματίδιο βρίσκεται σε απειρόβαθο φρέαρ στο διάστημα  $[-d, d]$ . Στη χρονική στιγμή  $t = 0$  η κυματοσυνάρτηση είναι  $\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(x)$ , όπου  $\phi_0$  και  $\phi_1$  η θεμελιώδης και πρώτη διεγερμένη στάθμη, αντίστοιχα. Να βρεθεί για  $t > 0$  η μέση τιμή της θέσης και της ενέργειας.

## 5 Ρεύμα πιθανότητας

Θεωρούμε την κυματοσυνάρτηση  $\Psi(x) = Ce^{-ax^2}e^{ikx}$ ,  $a > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Να υπολογιστεί η σταθερά κανονικοποίησης  $C$  και το ρεύμα πιθανότητας.

## 6 Αυθαιρεσία ως προς μια σταθερά στην ενέργεια

Έστω Χαμιλτονιανή  $\hat{H}$  που δεν εξαρτάται από το χρόνο. Ναδειχθεί ότι μια προσθετική σταθερά στην ενέργεια δεν αλλάζει τις προβλέψεις της κβαντικής μηχανικής, δηλαδή, ότι η  $\hat{H}_1 = \hat{H} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , είναι ισοδύναμη της  $\hat{H}$  ως προς τη χρονική εξέλιξη των μέσων τιμών.

## 7 Κάτω φράγμα της ενέργειας

- Ναδειχθεί ότι η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας είναι πάντα θετική  $\langle \hat{T} \rangle \geq 0$ . Επίσης, ότι  $\langle \hat{T} \rangle \geq 0$  μόνο αν  $\Psi(x) = \text{σταθ.}$ .
- Αν το δυναμικό έχει ολικό ελάχιστο  $V_{\min}$ , ναδειχθεί ότι  $\langle \hat{H} \rangle_{\Psi} \geq V_{\min}$ .
- Για ιδιοτιμές της ενέργειας  $E_n$ , ναδειχθεί ότι  $E_n \geq V_{\min}$ .
- Αν  $E_0$  η θεμελιώδης στάθμη, ναδειχθεί ότι  $\langle \hat{H} \rangle_{\Psi} \geq E_0$  (για τυχαία  $\Psi$ ).

## 8 Δυναμικό $\delta$ σε απειρόβαθο πηγάδι

Θεωρούμε απειρόβαθο πηγάδι στο διάστημα  $[-d, d]$  με δυναμικό  $V(x) = -g\delta(x)$ ,  $g > 0$  ( $V(x) = -g\delta(x)$  εντός του διαστήματος και  $= \infty$  εκτός). Έστω ότι έχουμε ιδιοσυνάρτηση  $\Psi$  της Χαμιλτονιανής με ιδιοτιμή  $E = 0$ . Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση και η τιμή του  $g$ . Επίσης να βρεθούν όλες οι περιττές ιδιοσυναρτήσεις.

## 9 Μέτρηση ασύμβατων μεγεθών

Σε ένα σύστημα η Χαμιλτονιανή έχει γνωστές ιδιοκαταστάσεις  $\phi_n$  και αντίστοιχες ιδιοτιμές  $E_n$  χωρίς εκφυλισμό. Ένα μέγεθος  $\hat{A}$  έχει επίσης γνωστές ιδιοκαταστάσεις  $f_n$  και αντίστοιχες ιδιοτιμές  $a_n$  χωρίς εκφυλισμό. Τα εσωτερικά γινόμενα  $(\phi_n, f_m)$  θεωρούνται γνωστά. Τη στιγμή  $t = 0$  το σύστημα βρίσκεται σε γνωστή κατάσταση  $\Psi_0$ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω περιπτώσεων.

α) Τη στιγμή  $t = 0$  μετράται η ενέργεια και το αποτέλεσμα είναι  $E_2$ . Αργότερα, τη στιγμή  $t$ , μετράται το  $\hat{A}$  και το αποτέλεσμα είναι  $a_1$ .

β) Τη στιγμή  $t = 0$  μετράται το  $\hat{A}$  και το αποτέλεσμα είναι  $a_1$ . Αργότερα, τη στιγμή  $t$ , μετράται η ενέργεια και το αποτέλεσμα είναι  $E_2$ .