Εξέταση Κβαντικής Φυσικής Τμήματος Μαθηματικών (1/2/2023).

1 Θεμελιώδης στάθμη δυναμικού

Σωμάτιο μάζας m κινείται στο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sin^2(\pi x/L)}, & 0 < x < L, \\ +\infty, & x \leq 0 \text{ ή } x \geq L \end{cases}$$

όπου $A > 0$ και $L > 0$ πραγματικές σταθερές.

α) Αν η θεμελιώδης κατάσταση είναι η

$$\Psi(x) = \begin{cases} N\left[\sin(\pi x/L)\right]^{\mu}, & 0 < x < L, \quad (\mu > 1) \\ 0, & x \leq 0 \text{ ή } x \geq L, \end{cases}$$

τότε να βρεθούν η αντίστοιχη ενέργεια E και η σταθερά A συναρτήσει του μ. (Το N είναι σταθερά κανονικοποίησης.) [Υπόδειξη: Δείξτε ότι $d^2\Psi/dy^2 + \left(\bar{E} - B/\sin^2 y\right)\Psi = 0$, όπου $y = \pi x/L$, $\bar{E} = 2mL^2E/(\hbar^2\pi^2)$, $B = 2mL^2A/(\hbar^2\pi^2)$.]

β) Συγκρίνετε την E με τη θεμελιώδη ενεργειακή στάθμη του δυναμικού απειρόβαθου φρέατος

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, \\ +\infty, & x \leq 0 \text{ ή } x \geq L \end{cases}$$

και δώστε ερμηνεία.

2 Χρονικά εξαρτώμενη κατάσταση

Η κυματοσυνάρτηση σωματιδίου μάζας m που κινείται σε απειρόβαθο φρέαρ δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a, \\ +\infty, & |x| \geq a \end{cases}$$

είναι για $t = 0$ συνδυασμός θεμελιώδους και 1ης διεγερμένης [$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos(\pi x/2a)$, $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(\pi x/a)$]

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_0(x) + \phi_1(x)\right].$$

α) Γράψτε τη χρονική εξέλιξη της κατάστασης.

β) Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας $|\Psi(x,t)|^2$.

γ) Βρείτε τη μέση τιμή της θέσης, $\langle\hat{x}\rangle_t$, του σωματιδίου και δείξτε ότι είναι ταλαντούμενη, υπολογίζοντας τη συχνότητα και το πλάτος της ταλάντωσης. Δίνεται $\int_{-1}^{1} z\cos(\pi z/2)\sin(\pi z)dz = 32/(9\pi^2)$.

δ) Υπολογίστε για $t = 0$ τα εξής μεγέθη: (I) τη μέση τιμή του τελεστή της ομοτιμίας $\langle\hat{P}\rangle$, (II) τη μέση τιμή $\langle\hat{P}^2\rangle$, (III) τη διασπορά (ΔP).

ε) Πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη του ερωτήματος (δ) συναρτήσει του χρόνου και γιατί;

3 Απότομη αλλαγή δυναμικού

α) Υπολογίστε την ιδιοσυνάρτηση και την ιδιοτιμή ενέργειας της δέσμιας κατάστασης δυναμικού

$$V(x) = -g\delta(x), \quad g > 0.$$

β) Συλλογή σωματιδίων σε χρόνους $t < 0$ βρίσκεται στο δυναμικό του ερωτήματος (α) στη θεμελιώδη κατάσταση. Τη στιγμή $t = 0$ το δυναμικό αλλάζει απότομα σε

$$V(x) = -\lambda\delta(x), \quad \lambda > 0$$

και διατηρείται αμετάβλητο στο εξής. Να βρεθεί η πιθανότητα να μετρηθεί ενέργεια $E < 0$ για $t > 0$. Πώς μεταβάλλεται αυτή η πιθανότητα με το χρόνο και γιατί;

Λύσεις

Λύση 1α. Βρίσκουμε $\Psi''(x) = N\mu\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left[(\mu-1)\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{\mu-2} - \mu\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{\mu}\right]$. Χρησιμοποιήσαμε $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Αντικαθιστούμε τις Ψ'', Ψ και $V(x)$ στην εξ. ιδιοτιμών $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + V(x)\Psi = E\Psi$. Επικουρικά, ακολουθούμε την υπόδειξη η οποία μειώνει τον αριθμό των ποσοτήτων στους συντελεστές. Λαμβάνουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\mu(\mu-1)\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{\mu-2}+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\mu^2\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{\mu}+A\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{\mu-2} = E\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{\mu}.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές ομοβάθμιων όρων και λαμβάνουμε

$$A = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\mu(\mu-1), \quad E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\mu^2.$$

Λύση 1β. Η εξ. ιδιοτιμών του απειρόβαθου φρέατος είναι $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' = E\Psi$ με συνοριακές συνθήκες $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$. Η γενική λύση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες είναι $\Psi(x) = (\sqrt{2/L})\sin(n\pi x/L)$ με ιδιοτιμές ενέργειας $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Η θεμελιώδης στάθμη είναι $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$. Βρίσκουμε λοιπόν $E > E_1$. Ο φυσικός λόγος είναι η παρουσία του θετικού δυναμικού στην περίπτωση (α) που ωθεί τις ιδιοτιμές προς τα άνω.

Λύση 2α. Αντικαθιστώντας τις ϕ_0 και ϕ_1 στην εξ. ιδιοτιμών $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' = E\Psi$, βρίσκουμε $E_0 = (\hbar^2/2m)(\pi/2a)^2$, $E_1 = 4(\hbar^2/2m)(\pi/2a)^2$. Η χρονική εξέλιξη είναι:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_0(x)e^{-iE_0t/\hbar} + \phi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}\right].$$

Λύση 2β. Απλή αντικατάσταση της ως άνω κυματοσυνάρτησης δίνει

$$\begin{aligned}|\Psi(x,t)^2| &= \frac{1}{2}\left[|\phi_0(x)^2| + |\phi_1(x)^2| + 2\mathrm{Re}\,\phi_0^*(x)\phi_1(x)e^{i(E_1-E_0)t/\hbar}\right] \\ &= \frac{1}{2a}\cos^2\frac{\pi x}{2a} + \frac{1}{2a}\sin^2\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{a}\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{(E_1-E_0)t}{\hbar}\end{aligned}$$

Λύση 2γ.

$$\langle\hat{x}\rangle_t = (\Psi_t, \hat{x}\Psi_t) = \frac{1}{2}\left[(\phi_0, \hat{x}\phi_0) + (\phi_1, \hat{x}\phi_1) + (\phi_0, \hat{x}\phi_1)e^{i(E_0-E_1)t/\hbar} + (\phi_1, \hat{x}\phi_0)e^{i(E_1-E_0)t/\hbar}\right].$$

Οι πρώτοι δύο όροι μηδενίζονται, διότι είναι ολοκληρώματα $\int_{-a}^{a}$ άρτιας συνάρτησης $|\phi_0^2|$ ή $|\phi_1^2|$ επί την περιττή συνάρτηση x. Οι δύο επόμενοι όροι είναι μιγαδικοί συζυγείς αλλήλων. Τα εσωτερικά γινόμενα υπολογίζονται με τη βοήθεια της υπόδειξης. Τελικά λαμβάνουμε:

$$\langle\hat{x}\rangle_t = a\frac{32}{9\pi^2}\cos\left(\frac{E_1-E_0}{\hbar}t\right).$$

Άρα έχουμε ταλάντωση συχνότητας $\nu = \frac{E_1-E_0}{\hbar}/2\pi$ και πλάτους $a\frac{32}{9\pi^2}$.

Λύση 2δ. Γνωρίζουμε $\hat{P}\Psi(x) = \Psi(-x)$, $\hat{P}^2\Psi(x) = \hat{P}\Psi(-x) = \Psi(x)$, δηλ. $\hat{P}^2 = 1$. Εφόσον η ϕ_0 είναι άρτια και η ϕ_1 περιττή, $\hat{P}\phi_0 = \phi_0$ και $\hat{P}\phi_1 = -\phi_1$. Άρα, για $t = 0$, $\hat{P}\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{P}\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{P}\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1$ και $(\Psi, \hat{P}\Psi) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1) = 0$, λαμβάνοντας υπ΄όψη την ορθοκανονικότητα των ϕ_0 και ϕ_1. Επίσης, $(\Psi, \hat{P}^2\Psi) = (\Psi, \Psi) = 1$. Άρα, $(\Delta P)^2 = (\Psi, \hat{P}^2\Psi) - (\Psi, \hat{P}\Psi)^2 = 1$.

Λύση 2ε. Δεν μεταβάλλονται, διότι η Χαμιλτονιανή είναι άρτια (το δυναμικό είναι άρτιο) και άρα μετατίθεται με την ομοτιμία, καθιστώντας την ομοτιμία διατηρήσιμο μέγεθος. (Η κατανομή πιθανότητας διατηρήσιμων μεγεθών δεν αλλάζει με το χρόνο, όπως ξέρουμε από το θεώρημα Ehrenfest.)

Λύση 3α. Βλ. σημειώσεις κεφ. 8.2.

Λύση 3β. Η απότομη αλλαγή του δυναμικού δεν συνεπάγεται απότομη αλλαγή της κυματοσυνάρτησης. Άρα, για $t = 0^+$, έχουμε $\Psi(x) = \frac{\sqrt{mg}}{\hbar} e^{-mg|x|/\hbar}$. Η μόνη αρνητική ιδιοτιμή ενέργειας του 2ου δυναμικού είναι η $E = -m\lambda^2/2\hbar^2$ με ιδιοσυνάρτηση $\Phi(x) = \frac{\sqrt{m\lambda}}{\hbar} e^{-m\lambda|x|/\hbar}$. Άρα, η πιθανότητα μέτρησης αρνητικής ιδιοτιμής ταυτίζεται με την πιθανότητα μετάβασης στην αντίστοιχη κατάσταση: $P = |(\Phi, \Psi)|^2 = 4/(g/\lambda + \lambda/g + 2)$ (όπως προκύπτει από την ολοκλήρωση). Λόγω διατήρησης της ενέργειας, δεν αλλάζει η πιθανότητα με το χρόνο (η κατανομή πιθανότητας διατηρήσιμων μεγεθών δεν αλλάζει με το χρόνο).