Προβλήματα

1 Αρμονικός ταλαντωτής

Δίδεται η Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή, $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$, με $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ και ο μετασχηματισμός σε τελεστές θέσης και ορμής

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \tag{1}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}. \tag{2}$$

Δίδονται επίσης οι σχέσεις

$$\hat{a}^\dagger\Phi_n = \sqrt{n+1}\Phi_{n+1} \quad \text{και} \quad \hat{a}\Phi_n = \sqrt{n}\Phi_{n-1} \tag{3}$$

όπου Φ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, οι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής (υπονοείται $\hat{a}\Phi_0 = 0$).

Έστω ότι μια συλλογή βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση Φ_n με ενέργεια E_n. Να βρεθούν τα ακόλουθα:
α) Η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας, $E_{\text{kin}} = (\Phi_n, \frac{1}{2m}\hat{p}^2\Phi_n)$ και της δυναμικής ενέργειας, $E_{\text{pot}} = (\Phi_n, \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\Phi_n)$.
β) Το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων $(\Delta x)(\Delta p)$ στην κατάσταση Φ_n. Τι παρατηρείτε για το γινόμενο στη Φ_0;

2 Δυναμικό συνάρτησης δ

Θεωρήστε το δυναμικό $V(x) = V_0\delta(x)$, $V_0 < 0$.
α) Λύστε το πρόβλημα δέσμιων καταστάσεων (βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις και ιδιοτιμές).
β) Λύστε το πρόβλημα σκέδασης (βρείτε τα πλάτη διέλευσης t και ανάκλασης $r(E)$ συναρτήσει της ενέργειας E). Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $|t(E)|^2$ και $|r(E)|^2$.
Υπενθυμίζουμε τους τελεστές ορμής $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ και κινητικής ενέργειας $\hat{T} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2$.

3 Σωματίδιο σε πηγάδι δυναμικού

Θεωρήστε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού με $V(x) = 0$ μεταξύ των σημείων $-d$ και $+d$ και $V(x) = V_0 > 0$ αλλιώς. Το V_0 είναι επαρκώς μεγάλο, ώστε να έχουμε προσεγγιστικά τις ιδιοσυναρτήσεις Χαμιλτονιανής με $V_0 = \infty$. Το πηγάδι φιλοξενεί σωματίδιο μάζας m.
α) Γράψτε τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ και ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής $E_1, E_2, \ldots$ (με αύξουσα διάταξη) στην ως άνω προσέγγιση. (Ψ_1 είναι η θεμελιώδης κατάσταση.)
β) Μια συλλογή βρίσκεται σε χρόνο $t = 0$ στην κατάσταση $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 + \Psi_2)$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της θέσης και της ορμής στη συλλογή συναρτήσει του χρόνου.
γ) Υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας της ενέργειας συναρτήσει του χρόνου.
Υπενθυμίζουμε:
$2\sin(\theta)\cos(\phi) = \sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi)$, $2\cos(\theta)\cos(\phi) = \cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)$.

4 Αλλαγή συστήματος αναφοράς

Θεωρήστε μια κατάσταση $\Phi(x)$ για σύστημα σωματιδίου μάζας m. Επίσης θεωρήστε το μετασχηματισμό «αλλαγής συστήματος αναφοράς» $\hat{U}_k$ που ορίζεται ως

$$\Phi(x) \to \Psi(x) \equiv \hat{U}_k \Phi(x) = e^{ikx}\Phi(x), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός είναι μοναδιαίος (διατηρεί τη νόρμα).
β) Βρείτε τη μέση τιμή της ταχύτητας στην Ψ, $\langle \hat{v} \rangle_\Psi \equiv (\Psi, \hat{v}\Psi)$, συναρτήσει του k και της μέσης τιμής $\langle \hat{v} \rangle_\Phi$.
γ) Βρείτε κατάλληλο $k = k_0$ (εξαρτώμενο από τη Φ), τέτοιο ώστε $\langle \hat{v} \rangle_\Psi = 0$.
δ) Υπολογίστε τη διαφορά της μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας μεταξύ των δύο κυματοσυναρτήσεων, $\langle \hat{T} \rangle_\Phi - \langle \hat{T} \rangle_\Psi$, για τυχαίο k.
ε) Βρείτε το $k = k_1$ για το οποίο ελαχιστοποιείται η κινητική ενέργεια της Ψ και συγκρίνετε με το k_0 του ερωτήματος (β).

Θυμίζουμε τους τελεστές ορμής $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, ταχύτητας $\hat{v} = \frac{1}{m}\hat{p}$, και κινητικής ενέργειας $\hat{T} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2$.

5 Κινητική ενέργεια

α) Δείξτε ότι οι ροπές της κατανομής της κινητικής ενέργειας, $\langle \hat{T} \rangle$, $\langle \hat{T}^2 \rangle$, $\langle \hat{T}^3 \rangle$, κλπ., δεν λαμβάνουν αρνητικές τιμές.
β) Σε σειρά μετρήσεων της ορμής μιας συλλογής προκύπτει μέσος όρος $\langle \hat{p} \rangle = p_0$ και διασπορά με τυπική απόκλιση $(\Delta p) = \Delta_0$. Να βρεθεί η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας συναρτήσει των p_0 και Δ_0.

6 Διαδικασία μέτρησης και χρονική εξέλιξη

Θεωρήστε γνωστές τις ιδιοκαταστάσεις και ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής $\hat{H}$, ϕ_i και E_i, και τις ιδιοκαταστάσεις και ιδιοτιμές ενός μεγέθους $\hat{A}$, f_i και a_i. Υποθέστε ότι στα προηγούμενα δεν υπάρχει εκφυλισμός. Θεωρήστε τώρα συλλογή που εκφράζεται μέσω της Ψ. Εκφράστε τα ακόλουθα μεγέθη συναρτήσει των ως άνω δεδομένων:
α) Πιθανότητα P_1: Μετράμε την ενέργεια και βρίσκουμε E_1. Μετά από χρόνο t μετράμε το $\hat{A}$ και βρίσκουμε την τιμή a_2.
β) Πιθανότητα P_2: Μετράμε το $\hat{A}$ και βρίσκουμε την τιμή a_2. Μετά από χρόνο t μετράμε την ενέργεια και βρίσκουμε E_1.
γ) Το πηλίκο P_1/P_2.

7 Πίεση αερίου

Σωματίδιο είναι εγκλωβισμένο σε κουτί όγκου $V = L^3$ (απειρόβαθο πηγάδι σε 3 διαστάσεις). Να δειχθεί ότι η πίεση στα τοιχώματα, $P = -(\partial E/\partial V)$, όπου $E = \langle \hat{H} \rangle$ η μέση τιμή της ενέργειας, ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση $PV = \frac{2}{3}E$.

8 Αβεβαιότητα ενέργειας-χρόνου

Έστω παρατηρήσιμο μέγεθος που αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A}$. Θεωρούμε το ρυθμό μεταβολής του μέσου όρου του $\hat{A}$, $d\langle\hat{A}\rangle/dt$ και την αβεβαιότητα (ΔA). Ορίζουμε τον χαρακτηριστικό χρόνο μεταβολής της $\langle\hat{A}\rangle$ ως

$$\tau = \frac{(\Delta A)}{|d\langle\hat{A}\rangle/dt|},$$

δηλαδή $\frac{(\Delta A)}{\tau} = \left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right|$ Να δείξετε την ακόλουθη σχέση αβεβαιότητας

$$(\Delta E)\,\tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

όπου (ΔE) η αβεβαιότητα στην ενέργεια.

9 Αρμονική προσέγγιση δυναμικού

Άτομο προσροφημένο στην επιφάνεια υλικού υπακούει στο δυναμικό

$$W(x) = w_0(e^{-2bx} - e^{-bx}).$$

όπου w_0 γνωστό και b άγνωστο. Μετρήσεις της ενέργειας των δέσμιων καταστάσεων δίνουν τις χαμηλότερες ενέργειες E_0, E_1, E_2, E_3 με $E_n - E_{n-1} = \Delta$, όπου $\Delta \ll w_0$ σταθερά ανεξάρτητη του n. Να συναχθεί η τιμή του b. Γιατί πρέπει να ισχύει η υπόθεση $\Delta \ll w_0$;
Υπόδειξη: Προσεγγίστε το δυναμικό με δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή γύρω από το ελάχιστο.

10 Κυματοπακέτο ελάχιστης αβεβαιότητας

Θεωρήστε το σύνολο των κανονικοποιημένων κυματοσυναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $\langle\hat{p}\rangle = 0$ και $\langle\hat{x}\rangle = 0$.
α)Δείξτε ότι, μεταξύ αυτών, οι μόνες που ικανοποιούν τη σχέση αβεβαιότητας ως ισότητα, δηλαδή

$$(\Delta x)(\Delta p) = \hbar/2,$$

έχουν τη μορφή

$$\Psi(x) = e^{i\gamma}\,\left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4}\,e^{-ax^2/2}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ και $\gamma \in \mathbb{R}$ σταθερές. Γενικεύστε το παραπάνω αποτέλεσμα για $\langle\hat{p}\rangle = p_0$ και $\langle\hat{x}\rangle = x_0$ [απάντηση: $\Psi(x) = e^{i\gamma}\,(a/\pi)^{1/4}\,e^{-a(x-x_0)^2/2}\,e^{ip_0x/\hbar}$].
β) Στην περίπτωση της Χαμιλτονιανής ελεύθερου σωματιδίου, δείξτε ότι η χρονική εξέλιξη του γινόμενου αβεβαιότητας γύρω από το ελάχιστο είναι παραβολική: $(\Delta x)_{\delta t}(\Delta p)_{\delta t} = \frac{\hbar}{2} + \kappa\,\delta t^2$, $\kappa > 0$, δt μικρό.
Υποδείξεις: Θεωρήστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις συναρτήσεις $\hat{p}\Psi$ και $\hat{x}\Psi$ στην οριακή περίπτωση που γίνεται ισότητα. Δείξτε ότι τότε $\hat{p}\Psi = c\,\hat{x}\Psi$ και λύστε αυτή την εξίσωση. Διαπιστώστε ότι η $c = i\gamma$ είναι αμιγώς φανταστική. Δίνεται το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$, $a > 0$.

11 Αρμονική ταλάντωση

Συλλογή βρίσκεται στη θεμελιώδη στάθμη δυναμικού $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, όπου m η μάζα του σωματιδίου. Τη στιγμή $t = 0$ ανάβει εξωτερικό πεδίο έντασης D και το δυναμικό γίνεται $W(x) = V(x) + Dx$. Να βρεθεί η μέση τιμή της θέσης, $\langle x \rangle_t$, συναρτήσει του χρόνου για $t > 0$.

12 Θεώρημα virial

α) Να δείξετε ότι, για ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής σε τρεις διαστάσεις, ισχύει

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle$$

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον μεταθέτη $[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]$.
β) Να δείξετε ότι, σε ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του Υδρογόνου, ισχύει

$$\langle \hat{T} \rangle = -\frac{1}{2}\langle \hat{V} \rangle$$

όπου $\hat{T}$ ο τελεστής της κινητικής ενέργειας.

13 Ακτινική ορμή

α) Να δείξετε την ακόλουθη ταυτότητα για τον τελεστή ακτινικής ορμής:

$$\hat{p}_r \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \right) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right).$$

β) Να δείξετε ότι ο τελεστής $\hat{p}_r$ είναι ερμιτιανός υπό την προϋπόθεση ότι δρα σε κυματοσυναρτήσεις $\Psi(\mathbf{r})$ τέτοιες ώστε

$$\lim_{r \to 0} [r\Psi(\mathbf{r})] = \lim_{r \to \infty} [r\Psi(\mathbf{r})] = 0.$$

14 Μέτρηση στροφορμής

Άτομο Υδρογόνου βρίσκεται σε κάποια κυματοσυνάρτηση. Με βάση αποτελέσματα μετρήσεων που δίνονται παρακάτω, να γραφεί σε κάθε περίπτωση (α-δ) η γενικότερη δυνατή μορφή της.

α) Μετρήσεις του μέτρου της στροφορμής στη συλλογή δίνουν μόνο τα αποτελέσματα 0 και $\sqrt{2}\,\hbar$.

β) Επιπλέον του (α), μετρήσεις της ενέργειας δίνουν 25% την τιμή E_1 (θεμελιώδης στάθμη) και 75% την E_9.

γ) Επιπλέον των (α) και (β), μετράται η μέση τιμή $\langle \hat{L} \rangle_z = 0$.

δ) Επιπλέον των (α,β,γ), στις μετρήσεις του $\hat{L}_z$ μετράται πάντα η τιμή 0.

15 Αγωγός τετραγωνικής διατομής

Σωματίδιο βρίσκεται σε αγωγό άπειρου μήκους στην κατεύθυνση z και τετραγωνικής διατομής στις κατευθύνσεις xy με ακμής L. Το δυναμικό εντός του αγωγού μηδενίζεται, ενώ τα τοιχώματα είναι πλήρως ανακλαστικά, δηλαδή $\Psi(\mathbf{r}) = 0$ για $x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = L$ (στις κατευθύνσεις x, y έχουμε απειρόβαθο πηγάδι). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας.

16 Απειρόβαθο σφαιρικό πηγάδι

Έστω δυναμικό

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

α) Να βρεθεί εξίσωση που να προσδιορίζει τις ιδιοτιμές E της ενέργειας εκφρασμένη ως προς τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, $j_l(ka)$, $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

β) Να βρεθεί η προσεγγιστική τιμή των ιδιοτιμών E στην περίπτωση $ka \gg l$. Δίνεται η ασυμπτωτική μορφή

$$j_l(x) \approx \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad x \gg l.$$

17 Εύρεση δυναμικού

Έστω κυματοσυμάρτηση

$$\Psi(x) = C\, z\, e^{-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

όπου $a > 0$ και C σταθερά κανονικοποίησης. Να υπολογιστεί το δυναμικό για το οποίο η Ψ είναι ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανής και η αντίστοιχη ιδιοτιμή της ενέργειας. Σε ποια ιδιοσυνάρτηση και ιδιοτιμή του ατόμου του Υδρογόνου αντιστοιχεί;

18 Προβλήματα τελεστών

1) Δείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] &= \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B} \\ \left[\hat{x}^n, \hat{p}\right] &= i\hbar n \hat{x}^{n-1} \quad n \in \mathbb{N} \\ \left[\hat{V}(\hat{x}), \hat{p}\right] &= i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

2) Εάν ο τελεστής $\hat{A} = \hat{A}(s)$ είναι συνάρτηση πραγματικής παραμέτρου s, ορίζουμε την παράγωγο

$$\frac{d\hat{A}}{ds} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\hat{A}(s+\delta) - \hat{A}(s)}{\delta}$$

Δείξτε ότι

$$(i) \qquad \frac{d}{ds}\left[\hat{A}(s)\hat{B}(s)\right] = \frac{d\hat{A}}{ds}\hat{B} + \hat{A}\frac{d\hat{B}}{ds}$$

$$(ii) \qquad \frac{d}{ds}\hat{A}^{-1}(s) = -\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{ds}\hat{A}^{-1}$$

3) Δείξτε ότι

$$e^{\hat{L}}\hat{A}e^{-\hat{L}} = \hat{A} + \frac{1}{1!}\left[\hat{L},\hat{A}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{L},\left[\hat{L},\hat{A}\right]\right] + \cdots$$

Υπόδειξη: θεωρήστε τον τελεστή $\hat{B}(s) = e^{s\hat{L}}\hat{A}e^{-s\hat{L}}$ και το ανάπτυγμα $\hat{B}(s) = \hat{B}(0) + \frac{s}{1!}\frac{d\hat{B}(0)}{ds} + \frac{s^2}{2!}\frac{d^2\hat{B}(0)}{ds^2} + \cdots$.

4) Εάν $\hat{A}$ και $\hat{B}$ δεν μετατίθενται, τότε να δείξετε ότι

$$\begin{array}{rl} (i) & \hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A} = (\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^2 \\ (ii) & \hat{A}^{-1}\hat{B}^n\hat{A} = (\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^n \\ (iii) & \hat{A}^{-1}f(\hat{B})\hat{A} = f(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}) \end{array}$$

όπου $f(\hat{B}) = \sum_n \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\hat{B}^n$. (Υπόδειξη: $\hat{B}^2 = \hat{B}\hat{A}\hat{A}^{-1}\hat{B}$.)

5) Δείξτε ότι η συνθήκη $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$ είναι αναγκαία ώστε $e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}$. Είναι και ικανή;

Υπόδειξη: $e^{\hat{A}+\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\hat{A}^{n-k}\hat{B}^k$.

Σχόλιο: Η λύση για τον $\hat{Z}$ στην εξίσωση $e^{\hat{Z}} = e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}}$ ονομάζεται τύπος Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) και έχει πολλαπλούς μεταθέτες:

$$\hat{Z} = \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{12}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \frac{1}{12}\left[\hat{B},\left[\hat{B},\hat{A}\right]\right] + \ldots$$

19 Απότομη μεταβολή δυναμικού

Συλλογή σωματιδίων σε μία διάσταση βρίσκεται στη θεμελιώδη στάθμη απειρόβαθου πηγαδιού στο $[0, L]$. Τη στιγμή $t = 0$ διπλασιάζεται το εύρος του πηγαδιού και γίνεται $[0, 2L]$. Σε μεταγενέστερο χρόνο $t > 0$ μετράται η ενέργεια. Να βρεθεί η πιθανότητα να μετρηθεί γνήσια μικρότερη (όχι ίση) της αρχικής. Πώς μεταβάλλεται η πιθανότητα με το χρόνο;