Θεωρία Μέτρου, Φεβρουάριος 2020

Θέμα 1: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{R}$, μετρήσιμες συναρτήσεις με $\int |f_n| d\mu \leq 1/n^2$, $n \geq 1$ και θέτουμε $f = \sum_{n\geq 1} f_n$. Να δειχθεί ότι

- **α):** η f ως πραγματική συνάρτηση είναι καλά ορισμένη μ-σχεδόν παντού και ολοκληρώσιμη,
- **β):** $\int f d\mu = \sum_{n\geq 1} \int f_n d\mu$.
- **γ):** Να αναφερθούν (με αιτιολόγηση) 3 τρόποι σύγκλισης της $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ στην f.
- **δ):** Να δειχθεί ότι υπάρχει και να υπολογιστεί το παρακάτω όριο:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos^2(nx) dx.$$

Θέμα 2: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και μ_* το εσωτερικό μέτρο του μ, με

$$\mu_*(B) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A} \text{ και } A \subset B\}, \quad \text{για κάθε } B \subset X.$$

Να δείξετε ότι

- **α):** αν $B \subset X$, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu_*(B) = \mu(A)$.
- **β):** αν $B_1, B_2 \subset X$ με $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, τότε $\mu_*(B_1 \cup B_2) \geq \mu_*(B_1) + \mu_*(B_2)$.
- **γ):** αν το μ_* είναι και εξωτερικό μέτρο, τότε το μ_* είναι μέτρο (σ–προσθετικό) στον $(X, \mathcal{P}(X))$.
- **δ):** υπάρχει μέτρο μ και σύνολα B_1, B_2 για το οποίο η ανισότητα του (β) ικανοποιείται γνήσια [αν χρειαστεί, θεωρείστε γνωστό ότι $\mu_*(B) + \mu^*(X \setminus B) = \mu(X)$, όπου μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο του μ].

Θέμα 3: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Να δείξετε ότι

- **α):** υπάρχει μία φθίνουσα ακολουθία (C_k) στην $\mathcal{A}$ έτσι ώστε $\mu(C_k) \to 0$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus C_k$.
- **β):** αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού.
- **γ):** αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και το μ είναι πεπερασμένο, τότε $g \circ f_n \to g \circ f$ σχεδόν ομοιόμορφα [θεωρείστε γνωστό το θεώρημα του Egoroff].
- **δ):** Ισχύει το (γ) για μη πεπερασμένα μέτρα ;

Θέμα 4: Έστω $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ένας χώρος μέτρου, όπου $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι το δυναμοσύνολο $\mathbb{N}$ και μ ένα μη μηδενικό μέτρο. Έστω επίσης $(A_n)_{n\geq 0}$ η εξής ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1, 3\mathbb{N}, 3\mathbb{N}+1, 3\mathbb{N}+2, 4\mathbb{N}, 4\mathbb{N}+1, 4\mathbb{N}+2, 4\mathbb{N}+3, \ldots$$

Θέτουμε $(f_n)_{n\geq 0}$ την ακολουθία των χαρακτηριστικών συναρτήσεων που αντιστοιχεί στην $(A_n)_{n\geq 0}$.

- **α):** Να υπολογιστούν τα σύνολα $\liminf A_n$ και $\limsup A_n$.
- **β):** Να δειχθεί ότι η (f_n) δεν μπορεί να συγκλίνει μ-σχεδόν παντού.
- **γ):** Να δειχθεί ότι η (f_n) δεν συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά μέτρο.
- **δ):** Να βρεθεί (g_n) υπακολουθία της (f_n) που συγκλίνει μ-σχεδόν παντού στη μηδενική συνάρτηση. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (g_n) συγκλίνει και κατά μέτρο ; (ξεχωρίστε περιπτώσεις για μ πεπερασμένο ή μη πεπερασμένο)

<u>ΟΛΟΙ ΤΟ ΘΕΜΑ 1 ΚΑΙ ΕΠΙΛΕΞΤΕ 2 ΑΚΟΜΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 10 ΛΕΠΤΑ