Μία Εισαγωγή στη Θεωρία Μέτρου

Σάμης Τρέβεζας

ΣΑΜΗΣ ΤΡΕΒΕΖΑΣ
Λέκτορας
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνων

Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου

Σημειώσεις σε εξέλιξη... (17/10/2019)

Περιεχόμενα

Εισαγωγικά

Οι Σημειώσεις αυτές αποτελούν τη βάση αλλά και συμπληρωματικό υλικό των παραδόσεων του εισαγωγικού μαθήματος της θεωρίας Μέτρου. Γίνεται μία συστηματική προσπάθεια εξοικείωσης του αναγνώστη με έννοιες και αποτελέσματα της θεωρίας αυτής χωρίς βέβαια οι σημειώσεις αυτές να υποκαθιστούν ολοκληρωμένα συγγράμματα πάνω σε αυτό το αντικείμενο. Μία ολοκληρωμένη μελέτη θα πρέπει να είναι συνδιαστική με ένα βασικό σύγγραμμα και άλλες σημειώσεις και ασκήσεις που προτείνονται στην ηλεκτρονική τάξη του μαθήματος.

Το επίπεδο περιγραφής είναι προπτυχιακό, αλλά μέρος του υλικού αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μία εισαγωγή σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Γίνεται μία μεθοδική ανάπτυξη της θεωρίας με μία ταυτόχρονη προσπάθεια να αναδειχθούν, στο μέτρο ενός προπτυχιακού μαθήματος, κάποιες συνδέσεις μεταξύ της θεωρίας Μέτρου και άλλων σπουδαίων κλάδων των Μαθηματικών, όπως ενδεικτικά η Τοπολογία, η Συναρτησιακή Ανάλυση, η θεωρία Πιθανοτήτων, η Περιγραφική θεωρία Συνόλων, η θεωρητική Στατιστική, η Αλγεβρα και η Γεωμετρία. Σε κάποιες περιπτώσεις δίνονται επίσης εφαρμογές σε περιοχές σύγχρονου ενδιαφέροντος.

Μία από τις επιδιώξεις του συγγραφέα είναι να δωθούν κίνητρα περαιτέρω μελέτης. Για να μπορέσει αυτό να επιτευχθεί, η ανάπτυξη των εννοιών και η παράθεση των αποτελεσμάτων δεν μπορεί να περιοριστεί στα πλαίσια μιας αξιωματικής θεμελίωσης, αλλά χωρίς βλάβη της προσεγμένης παρουσίασης των εννοιών και των αποτελεσμάτων πρέπει να αναδειχθούν διάφορες συνδέσεις της θεωρίας αυτής με πολλούς άλλους κλάδους των Μαθηματικών.

Οι σημειώσεις αυτές θα συμπληρώνονται στην πορεία του μαθήματος και έτσι υπάρχει σοβαρό ενδεχόμενο να γίνονται μικρές ή μεγαλύτερες τροποποιήσεις. Αναπόφευκτα, ανεπιθύμητοι εισβολείς, όπως παραλείψεις ή/και λάθη, μπορεί να αλλοιώσουν την ποιότητα των σημειώσεων και για το λόγο αυτό η συμβολή των αναγνωστών θα είναι σημαντική για την απομάκρυνση των εισβολέων. Εύχομαι λοιπόν μία ευχάριστη και εποικοδομητική μελέτη...

1

Δομημένες Οικογένειες Υποσυνόλων

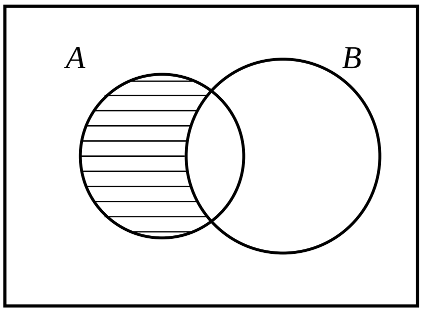
1.1 Σύνολα και Συναρτήσεις

Στην ενότητα αυτή **;** γίνεται μία υπενθύμιση βασικών εννοιών από τη συνολοθεωρία, με σκοπό την άνετη χρήση των συνόλων, διάφορων οικογενειών που σχηματίζουμε από αυτά και την άμεση χρήση βασικών ιδιοτήτων τους. Ξεκινάμε από στοιχειώδεις έννοιες και στη συνέχεια αναπτύσσουμε κατάλληλες δομές που θα μας φανούνε χρήσιμες όταν θα ορίσουμε αυστηρά την έννοια του μέτρου $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ως μίας ειδικής μορφής συνολοσυνάρτησης με πεδίο ορισμού μία κατάλληλα δομημένη οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}$ ενός αυθαίρετου συνόλου X, που ικανοποιεί κάποιες χρήσιμες ιδιότητες.

Έστω X ένα οποιοδήποτε σύνολο. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(X)$ το *δυναμοσύνολο* του X, δηλ.

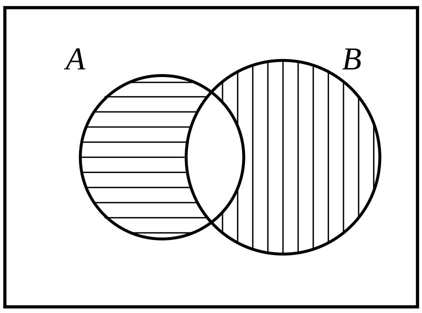
$$\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}.$$

Ως συνήθως, συμβολίζουμε με $A \cup B$ την *ένωση* και με $A \cap B$ ή AB την *τομή* των A και B. Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ως προς το βασικό σύνολο αναφοράς θα γράφουμε A^c για το *συμπλήρωμα* του A, ή $X \setminus A$ όταν θέλουμε να δηλώσουμε ξεκάθαρα το βασικό σύνολο αναφοράς. Υπενθυμίζουμε ότι τα *διαγράμματα του Venn* βοηθούν στην αναπαράσταση άλλων πράξεων μεταξύ συνόλων, όπως της *συνολοθεωρητικής διαφοράς* $A \setminus B$ και της *συμμετρικής διαφοράς* $A \triangle B$.



συνολοθεωρητική διαφορά

$A \setminus B = A \cap B^c$



συμμετρική διαφορά

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus AB$

Η ένωση και η τομή επεκτείνονται για αυθαίρετες οικογένειες υποσυνόλων του X. Αν $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ είναι μία τέτοια οικογένεια, τότε γράφοντας και $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, προκύπτουν διάφορες ισοδύναμες αναπαραστάσεις της ένωσης των συνόλων αυτών:

$$\bigcup \mathscr{A} \ \text{ ή } \ \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \ \text{ ή } \ \bigcup_{i\in I} A_i,$$

ενώ αντίστοιχες είναι και οι εκφράσεις για την τομή τους:

$$\bigcap \mathscr{A} \ \text{ ή } \ \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \ \text{ ή } \ \bigcap_{i\in I} A_i.$$

Όταν για συντομία δεν γίνεται αναφορά σε δεικτοσύνολο, π.χ., $\bigcup_i A_i$ ή $\bigcup_n A_n$ (αντίστοιχα για τομές), τότε ως σύνολο δεικτών υπονοείται το $\mathbb{N}$ και η ένωση (ή η τομή) θα θεωρείται αριθμήσιμη. Ερμηνεύουμε λοιπόν την ένωση μίας οικογένειας συνόλων ως το σύνολο εκείνο που ενώνει (κάτω από την ίδια στέγη) όλα τα μέλη των συνόλων που ανήκουν στη συλλογή (χωρίς να επιτρέπει επαναλήψεις στοιχείων). Αντίστοιχα, ερμηνεύουμε την τομή μίας οικογένειας συνόλων ως το σύνολο εκείνο που απομονώνει τα μέλη εκείνα που συνυπάρχουν σε όλα τα σύνολα τα συλλογής. Προφανώς,

$$\emptyset \subset \bigcap \mathscr{A} \subset \bigcup \mathscr{A} \subset X.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στις δύο οριακές περιπτώσεις, όταν δηλ. $\bigcap \mathscr{A} = \emptyset$ ή όταν $\bigcup \mathscr{A} = X$. Στην πρώτη περίπτωση τα σύνολα είναι 'από κοινού ξένα' ή 'ασύνδετα', με την έννοια ότι όλα μαζί έχουν κενή τομή ή με άλλα λόγια δεν έχουν κάποιο κοινό σημείο που να τα συνδέει, ενώ στη δεύτερη η συλλογή $\mathscr{A}$ 'καλύπτει' το X. Υπενθυμίζουμε ότι αν για δύο σύνολα A, B ισχύει ότι $AB = \emptyset$, τότε τα A και B λέγονται *ξένα* μεταξύ τους και η αντίστοιχη ένωση $A \cup B$ *ξένη ένωση*. Προκειμένου να μελετήσουμε καλύτερα τις ιδιότητες διάφορων οικογενειών υποσυνόλων που θα μας απασχολήσουν δίνουμε κάποιους περαιτέρω ορισμούς.

Ορισμός 1.1. Μία οικογένεια υποσυνόλων $\mathscr{A}$ του X λέγεται

(i) *κατά ζεύγη ξένη*, αν $AB = \emptyset$ για κάθε A, $B \in \mathscr{A}$ με $A \neq B$,

(ii) *από κοινού ξένη*, αν $\bigcap \mathscr{A} = \emptyset$,

(iii) *κάλυμμα* του X, αν $X \subset \bigcup \mathscr{A}$,

(iv) *διαμέριση* του X, αν αποτελεί κάλυμμα του X από κατά ζεύγη ξένα μη κενά υποσύνολα του X.

Παρατήρηση 1.2. (i) Η διαμέριση λέγεται πεπερασμένη ή αριθμήσιμη αν η οικογένεια $\mathscr{A}$ είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη αντίστοιχα. Ανάλογοι χαρακτηρισμοί ισχύουν και για το κάλυμμα.

(ii) Ο προσδιορισμός $\mathscr{A}$*-κάλυμμα* και $\mathscr{A}$*-διαμέριση* του X αναφέρεται στο σχηματισμό ενός καλύμματος ή μιας διαμέρισης του X αντίστοιχα με επιλογή συνόλων μέσα από μία οικογένεια $\mathscr{A}$.

(iii) Οι έννοιες κάλυμμα, $\mathscr{A}$*-κάλυμμα*, διαμέριση και $\mathscr{A}$*-διαμέριση*, επεκτείνονται φυσιολογικά σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο B του X, αντικαθιστώντας στον Ορισμό 1.2-(iii) και 1.2-(iv) το X με το B.

Αναφέρουμε ένα παράδειγμα από το σύνολο των πραγματικών αριθμών κάνοντας χρήση των παραπάνω εννοιών.

Παράδειγμα 1.3. Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ως προς τη συνήθη μετρική. Η $\mathcal{T}$ είναι προφανώς κάλυμμα του $\mathbb{R}$ (περιέχει το $\mathbb{R}$). Η συλλογή όμως αυτή είναι αρκετά μεγάλη. Πολλές φορές το ενδιαφέρον εστιάζεται στην εύρεση αρκετά μικρότερων υποσυλλογών με καλύτερες ιδιότητες, π.χ. φραγμένα διαστήματα. Η υποσυλλογή $\mathcal{S}$ των ανοικτών φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, αν και μικρότερη, παραμένει κάλυμμα του $\mathbb{R}$, προφανώς $\mathcal{T}$-κάλυμμα του $\mathbb{R}$, αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{a<b}(a, b)$ και $(a, b) \in \mathcal{T}$. Η $\mathcal{S}$ είναι υπεραριθμήσιμη, όμως αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 1}(-n, n)$,

μπορούμε να βρούμε και ένα αριθμήσιμο $\mathcal{S}$-κάλυμμα του $\mathbb{R}$. Από την άλλη μεριά, η $\mathcal{T}$ δεν περιέχει καμία μη τετριμμένη διαμέριση $\mathcal{D}$ του $\mathbb{R}$, δηλ. διαφορετική της $\{\mathbb{R}\}$. Πράγματι, αν υπάρχει υποσυλλογή $\mathcal{D}$ της $\mathcal{T}$ με τουλάχιστον δύο στοιχεία που αποτελεί διαμέριση του $\mathbb{R}$, τότε $\mathbb{R} = A \cup A^{\mathrm{c}}$, όπου $A \in \mathcal{D}$ και A^{c} είναι η ένωση όλων των υπόλοιπων στοιχείων της $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}$. Επειδή η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό, συμπεραίνουμε ότι το A^{c} είναι και αυτό ανοικτό. Έτσι το σύνολο $\mathbb{R}$ διαμερίζεται σε δύο ξένα μη κενά ανοικτά σύνολα. Είναι σχετικά εύκολο να δειχθεί με κάποια τοπολογικά επιχειρήματα (η απόδειξη παραλείπεται) ότι αυτό είναι αδύνατον και η μη ύπαρξη τέτοιας διάσπασης του $\mathbb{R}$ (και γενικότερα ενός τοπολογικού χώρου) είναι ακριβώς αυτό που τον χαρακτηρίζει ως συνεκτικό.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα έχει και η μελέτη συναρτήσεων μεταξύ μετρήσιμων χώρων, δηλ. των χώρων πάνω στους οποίους θα οριστούν τα μέτρα. Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι το σύνολο των συναρτήσεων από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y συμβολίζεται με Y^X, δηλ.

$$Y^X := \{f \,:\, f \text{ είναι συνάρτηση από το } X \text{ στο} Y\}.$$

Αν $A \subset X$, $B \subset Y$, τότε συμβολίζουμε κατά τα γνωστά με $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ την εικόνα του A μέσω της f και με $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ την αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ενώ η εναλλαγή των f και f^{-1} με την ένωση είναι πάντα εφικτή:

$$f\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \cup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{και} \quad f^{-1}\left(\cup_{i\in I} B_i\right) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i),$$

για οποιεσδήποτε οικογένειες $(A_i)_{i\in I}$ και $(B_i)_{i\in I}$ στην $\mathcal{P}(X)$ και $\mathcal{P}(Y)$ αντίστοιχα, δε συμβαίνει το ίδιο με την τομή και το συμπλήρωμα. Την ιδιότητα αυτή απολαμβάνει μόνο η f^{-1} και έτσι

$$f^{-1}\left(\cap_{i\in I} B_i\right) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{και} \quad f^{-1}(B^{\mathrm{c}}) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\mathrm{c}},$$

ενώ για την f δεν ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες, παρά μόνο ότι

$$f\left(\cap_{i\in I} A_i\right) \subset \cap_{i\in I} f(A_i) \quad \text{και} \quad f(X) \setminus f(A) \subset f(X \setminus A).$$

Παρ'όλα αυτά στην ειδική περίπτωση που η f είναι '1-1', οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ως ισότητα και αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι επί, τότε είναι δυνατή η εναλλαγή και με το συμπλήρωμα (Ασκ. 1.1).

Αν $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ και $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(Y)$, τότε συμβολίζουμε με

$$f(\mathscr{A}) := \{f(A) \,:\, A \in \mathscr{A}\} \quad \text{και} \quad f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B) \,:\, B \in \mathscr{B}\}.$$

Η χρήση των παραπάνω συμβολισμών θα είναι ιδιαίτερα βολική στη συνέχεια καθώς θα δουλεύουμε με οικογένειες υποσυνόλων. Είναι φανερό ότι $f(\mathscr{A}) \subset \mathcal{P}(Y)$ και $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathcal{P}(X)$.

Ιδιαίτερα σημαντικές στη θεωρία μέτρου, αλλά και σε πολλές εφαρμογές της, είναι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές παίρνουν τιμές μόνο 0 ή 1 και είναι οι απλούστερες των απλών συναρτήσεων όπως θα δούμε αργότερα και αποτελούν τις βασικές δομικές μονάδες με τη βοήθεια των οποίων προσεγγίζουμε κάθε μετρήσιμη συνάρτηση.

Ορισμός 1.4. Αν $A \subset X$, τότε συμβολίζουμε με $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ την *χαρακτηριστική συνάρτηση* του A, που ορίζεται ως

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A, \\ 0 & \text{αν } x \in A^{\mathrm{c}}. \end{cases}$$

Η συνάρτηση $f : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^X \equiv 2^X$, όπου $f(A) = \chi_A$ είναι '1-1' και επί, και έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε συνολοθεωρητικά κάθε υποσύνολο A με τη δείκτρια συνάρτηση χ_A. Η ταύτιση αυτή είναι χρήσιμη για να κατανοήσουμε καλύτερα αρκετές ιδιότητες των συνόλων.

Παρατήρηση 1.5. Έστω $A, B \in \mathcal{P}(X)$, μία αυθαίρετη οικογένεια $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ και μία αριθμήσιμη οικογένεια $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$. Δίνουμε εδώ κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτήσεων:

(i) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$,

(ii) $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$,

(iii) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$,

(iv) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{AB}$,

(v) $\chi_{\cup_{i\in I} A_i} = \max_{i\in I}\{\chi_{A_i}\}$,

(vi) $\chi_{\cap_{i\in I} A_i} = \min_{i\in I}\{\chi_{A_i}\}$,

(vii) $\chi_{\cup_n A_n} = \sum_n \chi_{A_n}$, αν $A_n A_m = \emptyset$, για $n \neq m$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η συμπεριφορά ακολουθιών (A_n) υποσυνόλων του X.

Ορισμός 1.6. Έστω (A_n) μία ακολουθία υποσυνόλων του X. Το σύνολο

$$\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k \quad (\text{ή } \overline{\lim} A_n)$$

λέγεται *ανώτερο όριο* της ακολουθίας (A_n), και το σύνολο

$$\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \quad (\text{ή } \underline{\lim} A_n)$$

λέγεται *κατώτερο όριο* της ακολουθίας (A_n). Θα λέμε ότι η ακολουθία (A_n) *συγκλίνει*, αν $\liminf A_n = \limsup A_n$ και η κοινή τιμή θα λέγεται *όριο* της ακολουθίας. Θα γράφουμε $\lim A_n = A$ ή $A_n \to A$ για να δηλώσουμε τη σύγκλιση της (A_n) στο A.

Παρατήρηση 1.7. Παρόλο που η σύγκλιση αυτή φαίνεται να ορίζεται με κάπως αυθαίρετο τρόπο, στην πραγματικότητα μπορούμε να δείξουμε ότι είναι τοπολογική. Με άλλα λόγια, μπορούμε να ορίσουμε μία κατάλληλη τοπολογία στο δυναμοσύνολο του X με τέτοιο τρόπο ώστε η σύγκλιση που ορίσαμε παραπάνω να συμπίπτει με τη σύγκλιση ως προς αυτήν την τοπολογία. Για να γίνει αυτό κατανοητό, χρειάζονται οι έννοιες της τοπολογίας και της τοπολογικής σύγκλισης, στοιχεία στα οποία θα αναφερθούμε σύντομα στην Ενότητα 1.4 για να δώσουμε μία πληρέστερη εικόνα. Το άμεσο αποτέλεσμα αυτής της σύνδεσης εμπεριέχεται στην Πρόταση 1.10.

Παρατήρηση 1.8. (i) Το ανώτερο όριο γράφεται αναλυτικά

$$\limsup A_n = (\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots}_{B_1}) \underset{\supset}{\cap} (\underbrace{A_2 \cup A_3 \cup \dots}_{B_2}) \underset{\supset \cdots \supset}{\cap \dots \cap} (\underbrace{A_n \cup A_{n+1} \cup \dots}_{B_n}) \underset{\supset \cdots}{\cap \dots}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι

$$\limsup A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}, \tag{1.1}$$

και το $\limsup A_n$ προκύπτει ως η τομή της φθίνουσας ακολουθίας (B_n).

(ii) Το κατώτερο όριο γράφεται αναλυτικά

$$\liminf A_n = (\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \dots}_{C_1}) \underset{\subset}{\cup} (\underbrace{A_2 \cap A_3 \cap \dots}_{C_2}) \underset{\subset \cdots \subset}{\cup \dots \cup} (\underbrace{A_n \cap A_{n+1} \cap \dots}_{C_n}) \underset{\subset \cdots}{\cup \dots}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι

$$\liminf A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ τελικά για κάθε } n\}, \tag{1.2}$$

και το $\liminf A_n$ προκύπτει ως η ένωση της αύξουσας ακολουθίας (C_n).

(iii) Από τους χαρακτηρισμούς (1.1) και (1.2), προκύπτει ότι

$$\emptyset \subset \bigcap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_n A_n \subset X. \tag{1.3}$$

Για να δείξουμε λοιπόν ότι μία ακολουθία (A_n) συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι $\limsup A_n \subset \liminf A_n$ ή ισοδύναμα ότι κάθε στοιχείο του X που ανήκει σε άπειρα A_n ανήκει τελικά στα A_n. Από την άλλη, για να δείξουμε ότι μία ακολουθία (A_n) δε συγκλίνει, αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο του X που ανήκει σε άπειρα A_n, αλλά και δεν ανήκει σε άπειρα πάλι από τα A_n.

(iv) Υπενθυμίζουμε ότι για μία ακολουθία πραγματικών αριθμών (α_n)

$$\limsup \alpha_n := \lim_n \sup_{k\geq n} \alpha_k = \inf_n \sup_{k\geq n} \alpha_k \quad \text{και} \quad \liminf \alpha_n := \lim_n \inf_{k\geq n} \alpha_k = \sup_n \inf_{k\geq n} \alpha_k$$

Αν λοιπόν συμβολίσουμε με $\sup A_n = \bigcup A_n$ και με $\inf A_n = \bigcap A_n$, τότε είναι φανερή η αναλογία των ορισμών των $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ για ακολουθίες υποσυνόλων (A_n) με τους αντίστοιχους ορισμούς των $\limsup \alpha_n$ και $\liminf \alpha_n$ για τις ακολουθίες (α_n) πραγματικών αριθμών. Η έννοια του $\sup A_n$ και $\inf A_n$ έχει ανάλογη ερμηνεία ως ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα, εδώ βέβαια για ακολουθία υποσυνόλων αυθαίρετου X, αφού με τη σχέση του περιέχεσθαι $\subset$, η ακολουθία (A_n) είναι άνω και κάτω φραγμένη από την $\bigcup A_n$ και την $\bigcap A_n$ αντίστοιχα και είναι μάλιστα τα βέλτιστα (ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα αντίστοιχα) με αυτήν την ιδιότητα.

Δίνουμε τώρα δύο προτάσεις που αναδεικνύουν τη σύνδεση της σύγκλισης ακολουθιών συνόλων με την κατά σημείο σύγκλιση των αντίστοιχων χαρακτηριστικών συναρτήσεων και την ύπαρξη ορίου μονότονων ακολουθιών (που είναι όπως είπαμε πάντα φραγμένες). Υπενθυμίζουμε πρώτα τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης μιας ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων.

Ορισμός 1.9. Έστω X σύνολο και (f_n) μία ακολουθία (πραγματικών) συναρτήσεων της μορφής $f_n : X \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f_n(x) \to f(x)$ καθώς $n \to \infty$ (ως προς την απόλυτη τιμή) για κάθε $x \in X$, τότε λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο (κ.ς.) στην f και γράφουμε $f_n \xrightarrow{\text{κ.ς.}} f$.

Πρόταση 1.10. *Έστω X σύνολο, $A \subset X$ και (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του X. Τότε*

$$A_n \to A \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \chi_{A_n} \xrightarrow{\text{κ.ς.}} \chi_A.$$

Πρόταση 1.11. *Κάθε μονότονη ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του X συγκλίνει και ισχύει ότι:*

$$\lim A_n = \begin{cases} \bigcup_n A_n & \text{αν } (A_n) \text{ αύξουσα} \\ \bigcap_n A_n & \text{αν } (A_n) \text{ φθίνουσα.} \end{cases}$$

Οι αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων προτείνονται ως ασκήσεις.

Ασκήσεις

1.1 Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση και $A,\ B,\ A_i \subset X,\ i \in I$.

(i) Αποδείξτε ότι

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

Δείξτε ότι γενικά δεν ισχύει η ισότητα.

(ii) Αν η f είναι '1-1', δείξτε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα.

(iii) Αν $A \subset B$, αποδείξτε ότι
$$f(B) \setminus f(A) \ \subset \ f(B \setminus A).$$
Δείξτε ότι γενικά δεν ισχύει η ισότητα. Συμπεράνετε ότι
$$f(X) \setminus f(A) \ \subset \ f(X \setminus A)$$
και άρα αν η f είναι επί, τότε
$$(f(A))^c \ \subset \ f(A^c).$$

(iv) Αν η f είναι επιπλέον '1-1', δείξτε ότι όλες οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ως ισότητες. Συμπεραίνουμε ότι η εναλλαγή της f με το συμπλήρωμα είναι έγκυρη για f '1-1' και επί.

1.2 Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση και $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ καλύμματα του X και του Y αντίστοιχα.

(i) Αν $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ είναι καλύμματα του X και του Y αντίστοιχα, να δείξετε ότι η $f^{-1}(\mathscr{B})$ είναι κάλυμμα του X και η $f(\mathscr{A})$ είναι κάλυμμα του $f(X)$.

(ii) Αν $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ είναι διαμερίσεις του X και του Y αντίστοιχα, να εξετάσετε αν τα $f(\mathscr{A})$ και $f^{-1}(\mathscr{B})$ είναι διαμερίσεις του Y και του X αντίστοιχα. Τί αλλάζει αν η f είναι (α) '1-1', (β) επί, (γ) '1-1' και επί ;

1.3 Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει $\mathcal{F}$-διαμέριση του $\mathbb{R}$, με (i) υπεραριθμήσιμο, (ii) αριθμήσιμο και (iii) πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (μη τετριμμένη).

1.4 Να υπολογιστεί η $\cup_n A_n$ και η $\cap_n A_n$ όταν:

(i) $A_n = (0,\ 1 + 1/n)$,

(ii) $A_n = (0,\ 1 - 1/n)$,

(iii) $A_n = [1/n,\ 1 - 1/n)$,

(iv) $A_n = [(-1)^n - 1/n,\ 1 - 1/n)$,

(v) $A_n = [(-1)^n/n,\ 1 + (-1)^n)$.

1.5 Να αποδειχθεί η Πρόταση 1.10.

1.6 Να αποδειχθεί η Πρόταση 1.11.

1.7 Να βρεθεί ακολουθία (A_n) για την οποία $\liminf A_n = \emptyset$ και $\limsup A_n = X$.

1.8 Να βρεθεί ακολουθία (A_n) για την οποία όλες οι ανισότητες της σχέσης (1.3) ισχύουν γνήσια.

1.9 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών (A_n), (B_n), όπου $A_n = (1/n, 2 - 1/n]$ και $B_n = (-1/n, 1 - 1/n]$.

1.10 Να υπολογιστούν τα $\liminf A_n$ και $\limsup A_n$ και να εξεταστεί η ύπαρξη του ορίου των ακολουθιών (A_n) της'Ασκησης 1.4.

1.11 Έστω ακολουθίες (A_n), (B_n) για τις οποίες ισχύει ότι $A_n \to A$ και $B_n \to B$. Να δείξετε ότι $A_n \cap B_n \to A \cap B$ και $A_n \cup B_n \to A \cup B$.

1.2 σ–άλγεβρες

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με διάφορες οικογένειες υποσυνόλων $\mathcal{A}$ ενός βασικού συνόλου X που ικανοποιούν ενδιαφέρουσες ιδιότητες κλειστότητας ως προς κάποιες βασικές συνολοθεωρητικές πράξεις (ένωση, τομή, ...) και τελεστές (συμπλήρωμα). Οι προκύπτουσες δομές είναι απαραίτητες για τη μελέτη της θεωρίας μέτρου. Όπως θα δούμε, για πολύ σημαντικά μέτρα, όπως το μέτρο Lebesgue, η απόδοση μέτρου δεν είναι πάντα δυνατή σε κάθε υποσύνολο A ενός βασικού συνόλου X και έτσι ανακύπτει φυσιολογικά το ερώτημα σε ποιά υποσύνολα μπορούμε να αποδώσουμε μέτρο. Αναγνωρίζοντας το χαρακτήρα του μέτρου ως μίας συνολοσυνάρτησης που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες, τότε το παραπάνω ερώτημα ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης της πιο κατάλληλης δομής που πρέπει να έχει η $\mathcal{A}$ ώστε να παίξει το ρόλο του πεδίου ορισμού του μέτρου (ως συνολοσυνάρτησης).

Η δομή που έχει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στη θεωρία μέτρου είναι αυτή της σ–άλγεβρας.

Ορισμός 1.12. Μία συλλογή (κλάση ή οικογένεια) $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X λέγεται *σ–άλγεβρα* στο X (ή επί του X) αν:

(i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (ή $\emptyset \in \mathcal{A}$ ή $X \in \mathcal{A}$),

(ii) αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \in \mathcal{A}$ [κλειστή στα συμπληρώματα],

(iii) αν (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ [κλειστή στις (άπειρες) αριθμήσιμες ενώσεις].

Το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ λέγεται *μετρήσιμος χώρος* και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λέγονται *$\mathcal{A}$–μετρήσιμα σύνολα*. Όπως θα δούμε παρακάτω η ονομασία μετρήσιμος χώρος προέρχεται από το γεγονός ότι στη σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X μπορούμε να ορίσουμε μέτρα. Ο όρος $\mathcal{A}$–μετρήσιμα προσδιορίζει σε ποιά σ–άλγεβρα θεωρούμε ότι ανήκουν τα εν λόγω υποσύνολα του X και τέλος η επιλογή της ονομασίας σ–άλγεβρα σχετίζεται με την ενίσχυση των ιδιοτήτων που ικανοποιεί μία άλγεβρα υποσυνόλων του X (έννοια που θα δούμε στην επόμενη ενότητα). Συγκεκριμένα, η απαίτηση μία άλγεβρα να είναι 'σ' την υποχρεώνει να είναι κλειστή σε αριθμήσιμες ενώσεις και όχι μόνο σε πεπερασμένες όπως καθορίζεται στον ορισμό μιας άλγεβρας.

Παρατήρηση 1.13. Αν $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα επί του X, τότε

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, αφού από τη συνθήκη $\mathcal{A} \neq \emptyset$ υπάρχει κάποιο $A \in \mathcal{A}$ και άρα $X = A \cup A^c \cup A \cup A^c \cup \cdots$ και $\emptyset = X^c$. Η συνθήκη αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από τις συνθήκες $\emptyset \in \mathcal{A}$ ή $X \in \mathcal{A}$, αφού είναι προφανές ότι από αυτές έπεται απ'ευθείας ότι $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

(ii) είναι κλειστή και στις πεπερασμένες ενώσεις.
Απόδειξη:
Αρκεί να δείξουμε ότι αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{A}$.
$A \cup B = A \cup B \cup A \cup A \cup \cdots$ είναι αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$ και λόγω της κλειστότητας στις άπειρες αριθμήσιμες ενώσεις $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Στην πραγματικότητα, όπως βλέπουμε σε αυτήν την απλή απόδειξη η κλειστότητα σε άπειρες αριθμήσιμες ενώσεις οδηγεί σε κλειστότητα και σε πεπερασμένες ενώσεις εφαρμόζοντας το παραπάνω τέχνασμα. Για λόγους απλότητας, θα αναφερόμαστε λοιπόν στη συνθήκη αυτή ως κλειστότητα σε αριθμήσιμες ενώσεις, συμπεριλαμβάνοντας και τις πεπερασμένες, αλλά και τις αριθμησίμως άπειρες.

(iii) είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές (συμπεριλαμβάνοντας και τις πεπερασμένες).
Απόδειξη:

Πράγματι, αν (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε λόγω της κλειστότητας στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις (που περιλαμβάνει και τις πεπερασμένες), έχουμε $\bigcap\limits_n A_n = (\bigcup\limits_n A_n^c)^c \in \mathcal{A}$.

(iv) είναι κλειστή στις συνολοθεωρητικές διαφορές $[A \setminus B = AB^c \in \mathcal{A}]$,

(v) είναι κλειστή στις συμμετρικές διαφορές $[A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}]$.

Δίνουμε τώρα κάποια απλά παραδείγματα σ–αλγεβρών.

Παράδειγμα 1.14. Είναι προφανές ότι αν $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα επί του X, τότε

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X). \tag{1.4}$$

- η συλλογή $\{\emptyset, X\}$ είναι σ–άλγεβρα και λέγεται η *τετριμμένη* σ–άλγεβρα.
- το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι σ–άλγεβρα και λέγεται η *διακριτή* σ–άλγεβρα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η κλάση $\mathscr{A}(X)$ όλων των σ–αλγεβρών επί του X εφοδιασμένη με τη σχέση μερικής διάταξης του περιέχεσθαι έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο. Η τετριμμένη και η διακριτή σ–άλγεβρα είναι η ελάχιστη και η μέγιστη δυνατή σ–άλγεβρα αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.15. Έστω X σύνολο με $|X| > 1$ και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Τότε η $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ είναι σ–άλγεβρα.
π.χ., αν $X = \{1, 2, 3, 4\}$, τότε $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, X\}$ ή $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$ είναι σ–άλγεβρες.

Παράδειγμα 1.16. Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο (π.χ. $X = \mathbb{R}$). Τότε η οικογένεια $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}$ είναι σ–άλγεβρα.
Απόδειξη:
Ας ελέγξουμε τις ιδιότητες του ορισμού :

(i) Προφανώς το $\emptyset$ ως υποσύνολο του X είναι αριθμήσιμο, άρα $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε A αριθμήσιμο ή A^c αριθμήσιμο και έτσι A^c αριθμήσιμο ή $(A^c)^c$ αριθμήσιμο. Επομένως $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Έστω $(A_n) \subset \mathcal{A}$. Έχουμε ότι $\forall n \geq 1$, A_n αριθμήσιμο ή A_n^c αριθμήσιμο. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι είτε για κάθε $n \geq 1$, το A_n είναι αριθμήσιμο και άρα $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$ ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων, είτε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $A_{n_0}^c$ αριθμήσιμο. Τότε, $\left(\bigcup\limits_n A_n\right)^c = \bigcap\limits_n A_n^c \subset A_{n_0}^c$ και άρα είναι αριθμήσιμο. □

Όταν διαθέτουμε μία δεδομένη συλλογή σ–αλγεβρών (επί του ιδίου συνόλου), τότε εύκολα μπορούμε να βρούμε τη μεγαλύτερη δυνατή σ–άλγεβρα που περιέχουν από κοινού. Αυτή προκύπτει άμεσα παίρνοντας την τομή τους, δηλ., απομονώνοντας σε μία καινούρια οικογένεια υποσυνόλων όλα τα σύνολα που εμφανίζονται απο κοινού σε όλες τις σ–άλγεβρες της συλλογής.

Πρόταση 1.17. *(τομή σ-αλγεβρών $\Longrightarrow$ σ-άλγεβρα)*
Αν $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια σ–αλγεβρών επί ενός συνόλου X, τότε η $\mathcal{A} := \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \subset X \ : \ A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I\}$ είναι σ–άλγεβρα και συνιστά τη μέγιστη κοινή σ–άλγεβρα που περιέχουν.

Απόδειξη:
Ας ελέγξουμε τις ιδιότητες του ορισμού :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$ (διότι τα $\mathcal{A}_i$ είναι σ–άλγεβρες) και τότε $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν (A_n) στην $\mathcal{A}$, τότε η (A_n) είναι στην $\mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.
Από κατασκευής είναι η μέγιστη κοινή σ–άλγεβρα που περιέχουν, αφού η $\mathcal{A}$ περιέχεται σε κάθε μία από αυτές και αν $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_i$, για κάθε $i \in I$, τότε $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

□

Σε αντίθεση με την τομή, η ένωση σ–αλγεβρών (επί του ιδίου συνόλου) δε διατηρεί πάντα την ιδιότητα της σ–άλγεβρας. Ως ένωση σ–αλγεβρών νοείται μία οικογένεια συνόλων που έχει ως μέλη τα σύνολα που εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά σε κάποια από τις σ–άλγεβρες που συμμετέχουν στην ένωση. Η παρατήρηση αυτή συνοδεύεται και με κάποια αντιπαραδείγματα.

Παρατήρηση 1.18. (ένωση σ–αλγεβρών $\not\Longrightarrow$ σ–άλγεβρα)
Δίνουμε δύο αντιπαραδείγματα σε αυτήν την κατεύθυνση.

Αντιπαράδειγμα 1: Έστω $X = \{1, 2, 3\}$. Θέτουμε $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$ και $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, X\}$. Οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρες, αφού είναι της μορφής $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ (Παράδειγμα 1.15). Όμως, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, αφού

$$\{2, 3\} \cap \{1, 3\} = \{3\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \quad ή \quad \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Αντιπαράδειγμα 2: Έστω $X = \mathbb{N}$. Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε
$\mathcal{A}_n := \{A \subset \mathbb{N} \ : \ A \subset \{0, 1, 2, \cdots, n\} \quad ή \quad A^c \subset \{0, 1, 2, \cdots, n\}\}$ και θέτουμε $\mathscr{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$.
Τότε, ισχύουν τα εξής:
(i) η $(\mathcal{A}_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία σ–αλγεβρών.
(ii) $\mathscr{A} = \left\{A \subseteq \mathbb{N} \ : \ |A| < \infty \quad ή \quad \left|A^c\right| < \infty\right\}$.
(iii) η $\mathscr{A}$ δεν είναι σ–άλγεβρα στο $\mathbb{N}$.

Απόδειξη:
(i) Έστω $n \geq 0$. Κατ' αρχήν θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα.
• $\emptyset \subset \{0, 1, \cdots, n\} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_n$.
• αν $A \in \mathcal{A}_n$ τότε
$A \subset \{0, 1, \cdots, n\} \quad ή \quad A^c \subset \{0, 1, \cdots, n\} \Rightarrow A^c \subset \{0, 1, \cdots, n\} \quad ή \quad (A^c)^c \subset \{0, 1, \cdots, n\} \ \Rightarrow \ A^c \in \mathcal{A}_n$.
• αν $(A_i)_{i \geq 1}$ στην $\mathcal{A}_n$ τότε $\forall i \geq 1, A_i \subset \{0, 1, \cdots, n\} \quad ή \quad A_i^c \subset \{0, 1, \cdots, n\}$.

1η περίπτωση: $\forall i \geq 1, A_i \subset \{0, 1, \cdots, n\} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \subset \{0, 1, \cdots, n\} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_n$.

2η περίπτωση: $\exists i_0 \geq 1, A_{i_0}^c \subset \{0, 1, \cdots, n\} \Rightarrow \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)^c = \bigcap_{i \geq 1} A_i^c \subset A_{i_0}^c \subset \{0, 1, \cdots, n\} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_n$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ είναι αύξουσα, δηλαδή ότι $\forall n \geq 0, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.
Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{A}_n \Rightarrow A \subset \{0, 1, \cdots, n\} \subset \{0, 1, \cdots, n+1\}$ ή $A^c \subset \{0, 1, \cdots, n\} \subset \{0, 1, \cdots, n+1\}$.
Έπεται τελικά ότι $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.
(ii) (άσκηση).
(iii) Έστω $A_n = \{2n\}, \forall n \geq 0$. Τότε $A_n \in \mathcal{A}_{2n} \subset \mathscr{A}, \forall n \geq 0$.
Έχουμε ότι $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n = \{0, 2, 4, \cdots\} \Rightarrow A^c = \{1, 3, 5, \cdots\}$. Έχουμε λοιπόν ότι ούτε το A ούτε το A^c είναι πεπερασμένα και σύμφωνα με το (ii) $A \notin \mathscr{A}$. Τελικά, η $\mathscr{A} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ δεν είναι σ–άλγεβρα.

Το παραπάνω αντιπαράδειγμα μας δείχνει ότι ακόμα και η ένωση μίας αύξουσας ακολουθίας σ–αλγεβρών δεν είναι κατ'ανάγκη σ–άλγεβρα.

Ασκήσεις

1.12 Έστω (A_n) ακολουθία στοιχείων μιας σ–άλγεβρας $\mathcal{A}$ επί ενός συνόλου X. Να δείξετε ότι $\liminf A_n, \limsup A_n \in \mathcal{A}$. Είναι κλειστή η $\mathcal{A}$ στα όρια συγκλινουσών ακολουθιών ;

1.13 Έστω $(X_1, \mathcal{A}_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι, όπου $X_1, X_2 \subset X'$ με $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Θέτουμε $X = X_1 \cup X_2$ και ορίζουμε $\mathcal{A} := \{A \subset X : A = A_1 \cup A_2,\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$

(i) Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα επί του X. Τη συμβολίζουμε $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.

(ii) Να εξεταστεί αν ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα όταν $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

1.14 Έστω $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση.

(i) Να δείξετε ότι η $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα επί του X.

(ii) Να δείξετε ότι η $f(\mathcal{A})$ δεν είναι σ-άλγεβρα ούτε επί του Y, αλλά και ούτε επί του $f(X)$. Αλλάζουν τα συμπεράσματα αν είναι η f είναι 1-1 ;

1.3 Παραγόμενες δομές

Όταν διαθέτουμε μία οικογένεια $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του X η οποία δεν διαθέτει κάποια επιθυμητή δομή, τότε είναι φυσιολογικό το ερώτημα της επέκτασής της με καινούρια σύνολα μέχρι να αποκτήσει τις επιθυμητές ιδιότητες. Η συμπλήρωση αυτή δε γίνεται με αυθαίρετο τρόπο, αλλά έτσι ώστε η επεκταμένη οικογένεια να είναι κλειστή ως προς τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την εν λόγω δομή και ταυτόχρονα να είναι συμπληρωμένη με τον πιο 'οικονομικό' τρόπο.

Ένα πολύ απλό παράδειγμα είναι η κλειστότητα στα συμπληρώματα. Αν $X = \{1, 2, 3\}$ και $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$, τότε είναι φανερό ότι μπορούμε να φτιάξουμε εύκολα μία επέκτασή της, δηλ., μία οικογένεια $\mathcal{B}$ που να περιέχει τη $\mathcal{C}$ και να πληρεί αυτές τις δύο απαιτήσεις. Να είναι δηλαδή και κλειστή στα συμπληρώματα και αυτό να έχει επιτευχθεί με τον πιο 'οικονομικό' τρόπο. Βλέπουμε εύκολα ότι η οικογένεια $\mathcal{B} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3\}\}$ πληρεί αυτές τις απαιτήσεις. Αυτή προκύπτει απ'ευθείας προσθέτοντας τα συμπληρώματα των στοιχείων της $\mathcal{C}$. Η διαδικασία συμπλήρωσης της αρχικής συλλογής με τα στοιχεία που λείπουν ώστε να φτάσουμε σε κλειστότητα στα συμπληρώματα έχει το πλεονέκτημα ότι είναι κατασκευαστικός, δηλ., δημιουργούμε καινούρια σύνολα από τα ήδη υπάρχοντα και έχουμε μία ξεκάθαρη αναπαράσταση των στοιχείων της επεκταμένης συλλογής ως συνάρτηση των στοιχείων της $\mathcal{C}$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$\mathcal{B} = \{A \subset X \ : \ A \in \mathcal{C} \text{ ή } A^c \in \mathcal{C}\}.$$

Από την άλλη μεριά είναι αυτόματα ο πιό 'οικονομικός', αφού οποιαδήποτε άλλη συλλογή περιέχει τη $\mathcal{C}$ και είναι κλειστή στα συμπληρώματα, θα πρέπει να την περιέχει. Θα χαρακτηρίζουμε αυτόν τον τρόπο δημιουργίας της $\mathcal{B}$, εκτός από 'κατασκευαστικό' (για τους λόγους που εξηγήσαμε) και 'εσωτερικό', με την έννοια ότι ξεκινάμε απ'ευθείας με τη $\mathcal{C}$ και φτάνουμε στη $\mathcal{B}$ από μικρότερες υποσυλλογές.

Θα θέλαμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία και στην κατασκευή της 'οικονομικότερης' σ–άλγεβρας που περιέχει μία δεδομένη οικογένεια υποσυνόλων. Στο προηγούμενο παράδειγμα, η επίτευξη της κλειστότητας γίνεται ουσιαστικά σε ένα βήμα, παίρνοντας απλά τα συμπληρώματα των στοιχείων της αρχικής συλλογής. Το ίδιο θα γινόταν, αν ζητούσαμε μόνο την κλειστότητα στις αριθμήσιμες ενώσεις. Τα πράγματα γίνονται πιο πολύπλοκα, αλλά πολύ πιο ενδιαφέροντα, αν ζητήσουμε την κλειστότητα και στις δύο ιδιότητες. Συγκεκριμένα, συμπληρώνουμε διαδοχικά την αρχική συλλογή με καινούρια σύνολα που προκύπτουν μέσα από την εφαρμογή και των δύο ιδιοτήτων που θέλουμε να ικανοποιούνται. Αν η κλειστότητα επιτευχθεί σε ένα βήμα (κάποιες φορές αυτό συμβαίνει), τότε σταματάμε εκεί. Αν όχι, συνεχίζουμε τη διαδικασία αυτή επαγωγικά μέχρι να φτάσουμε κάποια στιγμή σε μία συλλογή που να ικανοποιεί τις ιδιότητες της σ–άλγεβρας.

Θα μπορούσε ίσως να ελπίζει κανείς ότι μπορούμε να εξασφαλίσουμε την κλειστότητα μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων n ή στη χειρότερη περίπτωση οριακά για $n \to \infty$. Δυστυχώς, σε πολλές περιπτώσεις αυτό δε συμβαίνει και κατά συνέπεια δυσκολεύει την αναπαράσταση των στοιχείων της παραγόμενης δομής με τη βοήθεια πράξεων πάνω στα απλούστερα σύνολα της αρχικής συλλογής. Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο σε αυτό (ίσως σε μία επόμενη έκδοση των σημειώσεων), γιατί με εξαίρεση κάποιων απλούστερων περιπτώσεων, η πλήρης κατανόηση της διαδικασίας προϋποθέτει τη γνώση διατακτικών αριθμών και τη χρήση υπερπεπερασμένης επαγωγής, που είναι μία επέκταση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής από το σύνολο των φυσικών αριθμών σε ευρύτερα άπειρα υποσύνολα. Ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι είναι η κατασκευή της ιεραρχίας των συνόλων Borel η οποία καλύπτεται κυρίως σε μαθήματα περιγραφικής θεωρίας συνόλων. Παρ'όλα αυτά, και πριν ορίσουμε αυστηρά την έννοια της παραγόμενης σ–άλγεβρας, θα ξεκινήσουμε με κάποιες απλούστερες σ–άλγεβρες που μπορούν να περιγραφούν με επεκτάσεις διαμερίσεων και δίνουν μία ιδέα της εσωτερικής διαδικασίας παραγωγής σ–αλγεβρών από απλούστερες οικογένειες συνόλων.

Εισάγουμε τώρα κάποιους συμβολισμούς για διαδικασίες που μας οδηγούν στην κατασκευή καινούριων οικογενειών υποσυνόλων, από μία δεδομένη αρχική οικογένεια.

Ορισμός 1.19. Έστω X σύνολο και $C = \{A_i : i \in I\}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του X. Ορίζουμε τις οικογένειες

$$\begin{aligned} C_\sigma &:= \left\{\textstyle\bigcup_{i\in J} A_i \ : \ A_i \in C \text{ και } J \text{ αριθμήσιμο υποσύνολο του } I\right\}, \\ C_\delta &:= \left\{\textstyle\bigcap_{i\in J} A_i \ : \ A_i \in C \text{ και } J \text{ αριθμήσιμο υποσύνολο του } I\right\}, \\ C_c &:= \left\{A^{\mathrm{c}} \ : \ A \in C\right\}. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η C_σ μας δίνει μία καινούρια συλλογή που αποτελείται από όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων της C (πεπερασμένες ή αριθμησίμως άπειρες), μαζί με το $\emptyset$ που προκύπτει για $J = \emptyset$. Η C_δ αντιστοιχεί στην συλλογή που αποτελείται από όλες τις αριθμήσιμες τομές στοιχείων της C (πεπερασμένες ή αριθμησίμως άπειρες), μαζί με το X που προκύπτει για $J = \emptyset$. Από την άλλη μεριά, η C_c μας μεταφέρει στα συμπληρώματα (ως προς X) των στοιχείων της C.

Παρατήρηση 1.20. (i) Αν για $\tau_1, \tau_2 \in \{\sigma, \delta, c\}$ ορίσουμε $C_{\tau_1\tau_2} := (C_{\tau_1})_{\tau_2}$, τότε είναι εύκολο να δούμε από τους κανόνες του De Morgan ότι $C_{\sigma c} = C_{c\delta}$ και $C_{\delta c} = C_{c\sigma}$, ενώ προφανώς ισχύουν επίσης ότι $C_{\sigma\sigma} = C_\sigma$, $C_{\delta\delta} = C_\delta$ και $C_{cc} = C$.

(ii) Με τους παραπάνω συμβολισμούς και βάση των παρατηρήσεων που κάναμε μετά τον ορισμό της σ–άλγεβρας μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τις συνθήκες κλειστότητας του ορισμού μιας σ–άλγεβρας με τον ακόλουθο τρόπο. Μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}$ του X είναι σ–άλγεβρα αν και μόνο αν $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}$. Σημειώνουμε βέβαια ότι η τελευταία συνθήκη εξασφαλίζει απ'ευθείας και τη συμμετοχή του $\emptyset$ στη συλλογή.

Στην παρακάτω πρόταση δίνουμε έναν τρόπο περιγραφής των μελών μιας ειδικής μορφής σ–αλγεβρών που σχετίζονται με διαμερίσεις ενός συνόλου.

Πρόταση 1.21. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{D} = \{D_i : i \in I\}$ μία διαμέριση του X. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) η $\mathcal{A} := \mathcal{D}_\sigma \bigcup \mathcal{D}_{\sigma c}$ είναι σ–άλγεβρα επί του X,

(ii) αν η $\mathcal{D}$ είναι αριθμήσιμη, τότε $\mathcal{D}_{\sigma c} = \mathcal{D}_\sigma$, ενώ αν η $\mathcal{D}$ είναι υπεραριθμήσιμη έχουμε $\mathcal{D}_\sigma \bigcap \mathcal{D}_{\sigma c} = \emptyset$.

Απόδειξη:

(i) Είναι φανερό ότι η $\mathcal{A} \neq \emptyset$, αφού η $\mathcal{D}$ συνιστά διαμέριση του X. Η κλειστότητα στα συμπληρώματα έπεται από την Παρατήρηση 1.20 και το γεγονός ότι

$$\mathcal{A}_c = (\mathcal{D}_\sigma \cup \mathcal{D}_{\sigma c})_c = \mathcal{D}_{\sigma c} \cup \mathcal{D}_{\sigma c c} = \mathcal{D}_{\sigma c} \cup \mathcal{D}_\sigma = \mathcal{A}.$$

Θα δείξουμε ότι είναι κλειστή και στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $M = \{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{D}_\sigma\}$ (ενδεχομένως $M = \emptyset$ ή $M = \mathbb{N}$). Τότε, για κάθε $n \in M$, καθορίζεται ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $I_n \subset I$:

$$A_n = \cup_{i \in I_n} D_i,$$

ενώ για κάθε $n \in M^c$, καθορίζεται ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $I_n \subset I$:

$$A_n = (\cup_{i \in I_n} D_i)^c.$$

Από τα παραπάνω, θέτοντας $I_M = \cup_{n \in M} I_n$ έπεται ότι

$$\cup_{n \in M} A_n = \cup_{n \in M} \cup_{i \in I_n} D_i = \cup_{i \in I_M} D_i, \tag{1.5}$$

ενώ θέτοντας $J_M = \cap_{n \in M^c} I_n$ έπεται ότι

$$\cup_{n \in M^c} A_n = \cup_{n \in M^c} (\cup_{i \in I_n} D_i)^c = (\cap_{n \in M^c} \cup_{i \in I_n} D_i)^c = (\cup_{i \in J_M} D_i)^c. \tag{1.6}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω του ότι η $\mathcal{D}$ είναι διαμέριση. Πράγματι, τα στοιχεία της είναι ξένα ανά δύο, και έτσι παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε τομή συνόλων της μορφής $\cup_{i \in I_n} D_i$, δίνει ένα σύνολο πάλι της ίδιας μορφής, όπου κάποιο D_i θα συμμετέχει στην ένωση αν $i \in \cap I_n$, με $n \in M^c$. Τελικά, από τις (1.5) και (1.6), έχουμε

$$\cup_n A_n = \left(\cup_{n \in M} A_n\right) \cup \left(\cup_{n \in M^c} A_n\right) = \left(\cup_{i \in I_M} D_i\right) \cup (\cup_{i \in J_M} D_i)^c \in \mathcal{D}_\sigma \cup \mathcal{D}_{\sigma c} (= \mathcal{A}),$$

αφού τα σύνολα I_M και J_M είναι αριθμήσιμα.

(ii) Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο και ότι $\mathcal{D}_\sigma \cap \mathcal{D}_{\sigma c} \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $A = \cup_{i \in J} D_i = (\cup_{i \in K} D_i)^c$, όπου J, K αριθμήσιμα υποσύνολα του I. Επειδή τα $(D_i)_{i \in I}$ αποτελούν διαμέριση το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας γράφεται $\cup_{i \in K^c} D_i$. Συμπεραίνουμε ότι $J = K^c$, το οποίο είναι άτοπο αφού το K^c είναι υπεραριθμήσιμο. Αν τώρα το I είναι αριθμήσιμο, τότε έχουμε $(\cup_{i \in K} D_i)^c = \cup_{i \in K^c} D_i \in \mathcal{D}_\sigma$, αφού το K^c είναι και αυτό αριθμήσιμο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\mathcal{D}_{\sigma c} \subset \mathcal{D}_\sigma$ και επομένως $\mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_{\sigma c c} \subset \mathcal{D}_{\sigma c}$. Αυτά μας δίνουν την ισότητα.

□

Όπως προαναφέραμε στην εισαγωγή αυτής της ενότητας, αυτός ο τρόπος περιγραφής σ–αλγεβρών με απλές πράξεις πάνω σε στοιχειώδη σύνολα είναι περιορισμένος. Χρειαζόμαστε έναν τυπικό ορισμό παραγόμενων σ–αλγεβρών από δεδομένες οικογένειες υποσυνόλων, ο οποίος να είναι απαλλαγμένος από κατασκευαστικές δυσκολίες.

Ορισμός 1.22. Έστω $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ και

$$\mathscr{A}(\mathcal{C}) = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \text{ και } \mathcal{A} \text{ σ–άλγεβρα}\}.$$

Η συλλογή

$$\sigma(\mathcal{C}) := \cap \mathscr{A}(\mathcal{C})$$

λέγεται η *παραγόμενη σ–άλγεβρα* της $\mathcal{C}$.

Παρατήρηση 1.23. (i) Η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι σ–άλγεβρα από την Πρόταση 1.17. Επίσης, προφανώς περιέχει τη συλλογή $\mathcal{C}$. Απο τον ορισμό της λοιπόν η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η μικρότερη (ή η ελάχιστη) σ–άλγεβρα που περιέχει τη συλλογή $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 1.24. Έστω X σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Αν $\mathcal{C} = \{A\}$, τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.
Απόδειξη:
Θέτουμε $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα (Παράδειγμα 1.15) που περιέχει τη $\mathcal{C}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ και αρκεί να δειχθεί ότι $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Αυτό όμως είναι προφανές αφού κάθε σ–άλγεβρα που περιλαμβάνει το A, μαζί με τα $\emptyset, X$ (που πάντα περιλαμβάνονται), θα έχει και το A^c (ως κλειστή στα συμπληρώματα). □

Παράδειγμα 1.25. Έστω $X = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{\{1,2\}\}$, $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{3\}\}$ και $\mathcal{D} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$. Να βρεθούν οι παραγόμενες σ–άλγεβρες των $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$.
Απόδειξη:
Από το Παράδειγμα 1.24 είναι φανερό ότι

$$\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, X\}\,. \tag{1.7}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\{4\} = (\{1,2\} \cup \{3\})^c \in \sigma(\mathcal{C})$ και άρα $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}')$, όπου $\mathcal{C}' = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$. Επειδή η $\mathcal{C}'$ συνιστά πεπερασμένη διαμέριση του X, συμπεραίνουμε από την Πρόταση 1.21 ότι η $\mathcal{C}'_\sigma$ που αποτελείται από όλες τις ενώσεις των στοιχείων της (8 διακεκριμένα στοιχεία) είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τη $\mathcal{C}'$, αλλά επειδή θα πρέπει να περιέχεται και στη $\sigma(\mathcal{C}')$ αναγκαστικά συμπίπτει με αυτήν. Με παρόμοιους συλλογισμούς δείχνεται ότι η $\sigma(\mathcal{D})$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα και άρα η $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{P}(X)$. □

Παρατηρούμε ότι στα παραπάνω παραδείγματα οι παραγόμενες σ–άλγεβρες μπορούν να γραφτούν στη μορφή $\sigma(\mathcal{D})$, όπου $\mathcal{D}$ είναι μία διαμέριση του X. Έτσι στο Παράδειγμα 1.24 η $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{D})$, όπου $\mathcal{D} = \{A, A^c\}$, αλλά και στο Παράδειγμα 1.25 βρήκαμε τις παραγόμενες σ–άλγεβρες εύκολα με τη βοήθεια κατάλληλων διαμερίσεων. Αυτές οι σ–άλγεβρες είναι ειδικές περιπτώσεις σ–αλγεβρών που παράγονται από διαμερίσεις (και μάλιστα εδώ πεπερασμένες). Είναι φανερό ότι διαφορετικές οικογένειες υποσυνόλων μπορούν να παράγουν τις ίδιες σ–άλγεβρες, αλλά μπορούμε να βρούμε κοινά γνωρίσματα στη δομή σ–αλγεβρών ανάλογα με το είδος των οικογενειών που τις παράγουν και την πληθικότητά τους. Σχετικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.26. Έστω $\mathcal{A}$ σ–άλγεβρα επί του X. Μία οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται *ένας γεννήτορας* της $\mathcal{A}$ αν $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ και τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}$ *παράγεται* από τη $\mathcal{C}$. Αν ο γεννήτορας συνιστά διαμέριση του X, τότε λέμε ότι η A *παράγεται από διαμέριση*. Ένας γεννήτορας λέγεται *αριθμήσιμος γεννήτορας* αν έχει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων. Η σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται *αριθμήσιμα παραγόμενη* αν έχει έναν αριθμήσιμο γεννήτορα. Αν επιπλέον ο γεννήτορας συνιστά διαμέριση του X, τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}$ *παράγεται από αριθμήσιμη διαμέριση*. Ο προσδιορισμός αριθμήσιμος σε όλα τα παραπάνω μπορεί να αντικατασταθεί με το *πεπερασμένος*, αν θέλουμε να διευκρινήσουμε ότι δεν πρόκειται για αριθμησίμως άπειρο.

Η Πρόταση 1.21 σε συνδυασμό με τα παραπάνω μας οδηγεί σε μία χρήσιμη αναπαράσταση των στοιχείων μιας σ–άλγεβρας που παράγεται από διαμέριση.

Πόρισμα 1.27. *Έστω $\mathcal{A}$ μία σ–άλγεβρα επί ενός συνόλου X που παράγεται από τη διαμέριση $\mathcal{D} = \{D_i : i \in I\}$. Αν η $\mathcal{D}$ είναι αριθμήσιμη, τότε*

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}_\sigma = \left\{A = \textstyle\bigcup_{i\in J} D_i \;:\; D_i \in \mathcal{D} \text{ και } J \text{ αριθμήσιμο υποσύνολο του } I\right\},$$

ενώ αν η $\mathcal{D}$ είναι υπεραριθμήσιμη, τότε

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}_\sigma \cup \mathcal{D}_{\sigma c} = \left\{A \subset X \;:\; A \text{ ή } A^c \in \mathcal{D}_\sigma\right\}.$$

Τα παρακάτω παραδείγματα αποτελούν εφαρμογή αυτού του χρήσιμου πορίσματος.

Παράδειγμα 1.28. Έστω $X = \mathbb{N}$, και $\mathcal{A} = \sigma\left(\left\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$, δηλ., η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μονοσύνολα του $\mathbb{N}$. Τότε, επειδή οι φυσικοί αριθμοί είναι αριθμήσιμο σύνολο και άρα η αντίστοιχη διαμέριση από τα μονοσύνολα είναι και αυτή αριθμήσιμη, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και άρα το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ παράγεται από διαμέριση. Είναι προφανώς αριθμήσιμα παραγόμενη σ–άλγεβρα.

Παράδειγμα 1.29. Έστω $X = \mathbb{R}$, και $\mathcal{A} = \sigma\left(\left\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\right\}\right)$, δηλ., η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μονοσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε, επειδή οι πραγματικοί αριθμοί είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και άρα η αντίστοιχη διαμέριση από τα μονοσύνολα είναι και αυτή υπεραριθμήσιμη, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ αριθμήσιμο ή A^c αριθμήσιμο$\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ δεν είναι αριθμήσιμα παραγόμενη σ–άλγεβρα.

Το επόμενο ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι το πώς θα αναγνωρίζουμε αν μία σ–άλγεβρα παράγεται από διαμέριση ή όχι.

Αν $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα επί του X, τότε για κάθε $x \in X$, θέτουμε $\mathcal{A}(x) := \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ και

$$D(x) := \bigcap \mathcal{A}(x). \tag{1.8}$$

Η συλλογή $\mathcal{A}(x)$ είναι μη κενή, αφού $X \in \mathcal{A}(x)$, και άρα λόγω ορισμού $\{x\} \subset D(x)$. Το σύνολο $D(x)$ περιέχει εκείνα τα στοιχεία του X που ανήκουν ακριβώς στα ίδια $\mathcal{A}$-σύνολα με το x. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας (επαληθεύεται άμεσα) στο X:

$$x \sim y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad D(x) = D(y). \tag{1.9}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει το X σε κλάσεις ισοδυναμίας που αντιστοιχούν ακριβώς στα σύνολα $D(x)$ που είναι (μεγιστικά) $\mathcal{A}$-αδιαχώριστα υπό την έννοια ότι ή ένα $\mathcal{A}$-σύνολο περιέχει εξολοκλήρου το $D(x)$ ή δεν το περιέχει καθόλου. Επειδή η $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να διαχωρίσει κάθε τέτοιο σύνολο (και προφανώς κάθε υποσύνολό του), θα το ονομάζουμε $\mathcal{A}$-αδιαχώριστη κλάση.

Ορισμός 1.30. Η διαμέριση

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \{D(x) : x \in X\}, \tag{1.10}$$

όπου το $D(x)$ δίνεται από την (1.8), θα λέγεται *η διαμέριση που επάγεται από τις $\mathcal{A}$-αδιαχώριστες κλάσεις του X*, ή απλά *η διαμέριση που επάγεται από την $\mathcal{A}$*, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Σημειώνουμε εδώ ότι ένα $\mathcal{A}$-αδιαχώριστο υποσύνολο του X δεν είναι υποχρεωτικά $\mathcal{A}$-μετρήσιμο, δηλ., δεν ανήκει πάντα στην $\mathcal{A}$ (δείτε Άσκηση ..).

Πρόταση 1.31. *Μία σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ επί ενός συνόλου X παράγεται από διαμέριση αν και μόνο αν $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})$, δηλ., αν η $\mathcal{A}$ συμπίπτει με την παραγόμενη σ–άλγεβρα των $\mathcal{A}$-αδιαχώριστων κλάσεων του X.*

Απόδειξη:
Αν η $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})$, τότε προφανώς παράγεται από διαμέριση, αφού η $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ συνιστά διαμέριση του X. Αποδεικνύουμε τώρα το ευθύ. Αν η $\mathcal{A}$ παράγεται από διαμέριση, τότε υπάρχει μία διαμέριση $\mathcal{D} = \{D_i : i \in I\}$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_{\sigma} \cup \mathcal{D}_{\sigma c}, \tag{1.11}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Πόρισμα 1.27. Θα δείξουμε τώρα ότι $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ και αυτό θα συμβεί αν για κάθε $i \in I$ αποδείξουμε ότι $D_i = D(x)$ για κάθε $x \in D_i$. Με άλλα λόγια η $\mathcal{D}$ πρέπει να αποτελεί μία αναπαράσταση των διακεκριμένων κλάσεων $D(x)$, που προκύπτουν από όλα τα στοιχεία του X.

Έστω λοιπόν $i \in I$, D_i το αντίστοιχο μέλος της $\mathcal{D}$ και $x \in D_i \neq \emptyset$. Προφανώς $D(x) \subset D_i \in \mathcal{A}(x)$. Από την άλλη, έστω $A \in \mathcal{A}(x)$. Από την αναπαράσταση (1.11), έχουμε ότι κάθε $\mathcal{A}$-σύνολο είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{D}$, αριθμήσιμη ή υπεραριθμήσιμη. Άρα $A \in \mathcal{A}(x)$, μόνο αν $D_i \subset A$, αφού αυτό είναι το μόνο σύνολο της $\mathcal{D}$ που περιέχει το x. Παίρνοντας την τομή όλων των $A \in \mathcal{A}(x)$, συμπεραίνουμε ότι $D_i \subset D(x)$, και έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Ασκήσεις

1.15 Να δείξετε ότι κάθε πεπερασμένη σ–άλγεβρα έχει πληθάριθμο δύναμη του 2.

1.16 Να δείξετε ότι κάθε αριθμήσιμη σ–άλγεβρα είναι υποχρεωτικά πεπερασμένη.

1.17 Έστω X αριθμήσιμο σύνολο. Να αποδείξετε ότι κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ επί του X παράγεται από διαμέριση. Ισχύει το ίδιο αν το X είναι υπεραριθμήσιμο ;

1.18 Έστω $\mathcal{A}$ σ–άλγεβρα επί ενός συνόλου X. Αν το X είναι αριθμήσιμο να δείξετε ότι οι $\mathcal{A}$–αδιαχώριστες κλάσεις είναι πάντα $\mathcal{A}$–μετρήσιμα σύνολα. Αυτό δεν ισχύει πάντα όταν το X είναι υπεραριθμήσιμο. Να βρεθεί αντιπαράδειγμα.

1.4 Τοπολογίες

Η έννοια της τοπολογίας είναι τόσο σημαντική στην Ανάλυση και στις εφαρμογές της που αποτελεί ένα ξεχωριστό αντικείμενο μελέτης στα Μαθηματικά. Το μόνο που θα κάνουμε είναι να αναφέρουμε σε αυτή τη μικρή παράγραφο κάποιους βασικούς ορισμούς και εντελώς στοιχειώδη αποτελέσματα, τα οποία θα μας χρειαστούν στην πορεία του μαθήματος για μία καλύτερη κατανόηση της σύνδεσης της θεωρίας Μέτρου με την Τοπολογία. Όπως θα δούμε, η έννοια της τοπολογίας προσδιορίζει τις έννοιες ανοικτό σύνολο και συνεχής συνάρτηση στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό γενίκευσης αυτών των εννοιών, αφού απομονώνει τις ιδιότητες εκείνες που χαρακτηρίζουν τα ανοικτά σύνολα και τις συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.32. Μία συλλογή $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X λέγεται *τοπολογία* στο X (ή επί του X) αν:

(i) $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{T} \ \Rightarrow\ AB \in \mathcal{T}$ (η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές),

(iii) $A_i \in \mathcal{T},\ i \in I,\ \Rightarrow\ \cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ για αυθαίρετο σύνολο δεικτών I (η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή σε ενώσεις αυθαίρετου πλήθους).

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται *τοπολογικός χώρος* και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται *ανοικτά σύνολα ($\mathcal{T}$-ανοικτά)*. Τα υποσύνολα του X που τα συμπληρώματά τους είναι ανοικτά λέγονται *κλειστά σύνολα ($\mathcal{T}$-κλειστά)*.

Αναφέρουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα τοπολογιών. Όπως θα παρατηρήσετε κιόλας από το πρώτο παράδειγμα υπάρχουν ομοιότητες στη δόμηση των τοπολογιών σε σχέση με τη δόμηση των σ-αλγεβρών. Εκτός βέβαια από τέτοιες αντιστοιχίες, οι διαφορές είναι μεγάλες, όπως για παράδειγμα ότι μία σ–άλγεβρα είναι κλειστή στα συμπληρώματα (το οποίο δε συμβαίνει γενικά σε μία τοπολογία) και είναι κλειστή μόνο σε αριθμήσιμες ενώσεις και όχι σε αυθαίρετο πλήθος ενώσεων. Παρόλο που υπάρχουν θεμελιώδεις διαφορές θα κάνουμε αναφορά, όπου χρειαστεί, σε αντιστοιχίες μεταξύ των δύο εννοιών για μία καλύτερη κατανόηση της θεωρίας και των μεταξύ τους συνδέσεων.

Παράδειγμα 1.33. Είναι προφανές ότι αν $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία επί του X, τότε

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X). \tag{1.12}$$

- η συλλογή $\{\emptyset, X\}$ είναι τοπολογία και λέγεται η *τετριμμένη τοπολογία*.

- το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι τοπολογία και λέγεται η *διακριτή τοπολογία*.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η κλάση $\mathscr{T}(X)$ όλων των τοπολογιών επί του X εφοδιασμένη με τη σχέση μερικής διάταξης του περιέχεσθαι έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο. Η τετριμμένη και η διακριτή τοπολογία είναι η ελάχιστη και η μέγιστη δυνατή τοπολογία επί του X αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.34. Έστω $X = \{a, b\}$ με $a \neq b$, ένα σύνολο με δύο στοιχεία. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ είναι τοπολογία επί του X. Ο χώρος αυτός λέγεται *χώρος του Sierpinski*. Είναι ειδική περίπτωση μιας τοπολογίας που είναι ταυτόχρονα τύπου ιδιαίτερου σημείου, αλλά και εξαιρούμενου σημείου (δείτε ασκ. 1.19).

Υπενθυμίζουμε παρακάτω την έννοια του μετρικού χώρου, την οποία και θα χρειαστούμε παρακάτω.

Ορισμός 1.35. Έστω X σύνολο και $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ συνάρτηση. Η d λέγεται *μετρική στο* X και ο (X, d) *μετρικός χώρος*, αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα),

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ιδιότητα).

Στην περίπτωση που η (i) αντικατασταθεί από την ασθενέστερη συνθήκη

(i') $d(x, x) = 0$, για κάθε $x \in X$,

τότε η d λέγεται *ψευδομετρική στο* X και ο (X, d) *ψευδομετρικός χώρος*. Σε έναν ψευδομετρικό χώρο επιτρέπονται διακεκριμένα σημεία του χώρου να έχουν μηδενική απόσταση, κάτι που είναι αδύνατον σε έναν μετρικό χώρο. Παρ'όλα αυτά μπορούμε από έναν ψευδομετρικό χώρο να πάμε σε έναν μετρικό χώρο ταυτίζοντας τα σημεία που έχουν μηδενική απόσταση. Αυτό είναι εφικτό μέσω της σχέσης ισοδυναμίας $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.

Παράδειγμα 1.36. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ το σύνολο $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ λέγεται *ανοικτή μπάλα* με κέντρο το x και ακτίνα ε. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται ανοικτό (ως προς τη μετρική d), αν για κάθε $x \in A$, υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon_x) \subset A$. Αν $\mathcal{T}_d = \{A \subset X : A \text{ ανοικτό ως προς τη μετρική } d\}$, τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι η $\mathcal{T}_d$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i)-(iii) μιας τοπολογίας. Η $\mathcal{T}_d$ λέγεται *η μετρική τοπολογία του* X και τα ανοικτά σύνολα ως προς τη μετρική d είναι ακριβώς τα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας $\mathcal{T}_d$. Αντίστροφα, αν $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία επί του X ιδιαίτερα σημαντικό είναι το ερώτημα κατά πόσον υπάρχει μία μετρική d τέτοια ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Αν υπάρχει, τότε η τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγεται *μετρικοποιήσιμη*. Για παράδειγμα, η διακριτή τοπολογία $\mathcal{P}(X)$, όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι μετρικοποιήσιμη με τη διακριτή μετρική (αυτό αιτιολογεί και το όνομά της), που ορίζεται από τη σχέση $d(x, y) = 1$ για $x \neq y$ και βέβαια $d(x, x) = 0$. Στη διακριτή τοπολογία κάθε σύνολο είναι ανοικτό (και ταυτόχρονα κλειστό). Υπάρχουν βέβαια και πολλά παραδείγματα μη μετρικοποιήσιμων χώρων. Με την απλή παρατήρηση ότι κάθε μονοσύνολο σε ένα μετρικό χώρο είναι κλειστό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι κάθε μετρικοποιήσιμη τοπολογία πρέπει να περιέχει όλα τα σύνολα της μορφής $X \setminus \{x\}$, όπου $x \in X$. Είναι φανερό λοιπόν ότι για ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο στοιχεία, ούτε η τετριμμένη τοπολογία, αλλά ούτε και όλες οι τοπολογίες των ιδιαίτερων και των εξαιρούμενων σημείων (ασκ. 1.19) είναι μετρικοποιήσιμες.

Ασκήσεις

1.19 Έστω X σύνολο με τουλάχιστον δύο σημεία και $b, c \in X$ με $b \neq c$.

(i) Να δείξετε ότι οι οικογένειες $\mathcal{T}_b = \{A \subset X : b \in A\} \cup \{\emptyset\}$ και $\mathcal{T}_{-c} = \{A \subset X : c \notin A\} \cup \{X\}$ είναι τοπολογίες επί του X. Με ποιά έννοια οι παραπάνω δύο τοπολογίες είναι δυικές ;

(iii) Να εξεταστεί αν η $\mathcal{T}_b$ και η $\mathcal{T}_{-c}$ είναι μετρικοποιήσιμες.

(iii) Να βρεθούν οι $\sigma(\mathcal{T}_b)$ και $\sigma(\mathcal{T}_{-c})$.

(iv) Να εξεταστεί πότε οι παραπάνω σ–άλγεβρες παράγονται απο διαμέριση και πότε όχι.

Όταν μία τοπολογία είναι της μορφής $\mathcal{T}_b$ για κάποιο $b \in X$, τότε λέγεται *τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου* $b \in X$, ενώ όταν είναι της μορφής $\mathcal{T}_{-c}$ για κάποιο $c \in X$, τότε λέγεται *τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου* $c \in X$.

1.20 Έστω X σύνολο με τουλάχιστον δύο σημεία και $\emptyset \subsetneq B, C \subsetneq X$. Ορίζουμε $\mathcal{T}_B = \{A \subset X : B \subset A\} \cup \{\emptyset\}$ και $\mathcal{T}_{-C} = \{A \subset X : C \subset A^c\} \cup \{X\}$. Επαναλάβετε όλα τα ερωτήματα της Άσκ. 1.19 για αυτές τις οικογένειες. Με ποιά έννοια γενικεύει τα αποτελέσματα της Άσκ. 1.19 ; Από την άλλη μεριά δείξτε ότι θα μπορούσαμε να ανάγουμε τα αποτελέσματα αυτής της άσκησης σε αυτά της Άσκ. 1.19.

1.21 Έστω (X, d) ένας ψευδομετρικός χώρος. Ορίζουμε μία διμελή σχέση $\sim$, όπου $a \sim b$ αν και μόνο αν $d(x, y) = 0$. Να δείξετε ότι

(i) η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X.

(ii) αν $X^* = X / \sim$ είναι ο χώρος πηλίκο και $[x] = \{y \in x : y \sim x\}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του x, τότε η συνάρτηση $d^* : X^* \times X^* \to \mathbb{R}_+$ όπου $d^*([x], [y]) = d(x, y)$ είναι μετρική στο X^* και άρα ο (X^*, d^*) είναι μετρικός χώρος.