Πρόοδος Δεκεμβρίου 2019 – Θεωρία Μέτρου

Θέμα 1: Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Ν.δ.ο.

(i) η συλλογή

$$\mathcal{B}' = \{ B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$ είναι σ-άλγεβρα επί του Y,

(ii) αν $\mathcal{C} \neq \emptyset$ είναι μία αυθαίρετη οικογ. υποσυνόλων του Y, τότε

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

Λύση

(i) Επαληθεύουμε τις 3 ιδιότητες μιας σ-άλγεβρας:

(α) $\emptyset \in \mathcal{B}'$, αφού $\emptyset \in \mathcal{B}$ και $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ ✓

(β) αν $B \in \mathcal{B}'$, τότε $B \in \mathcal{B}$ και υπάρχει $A \in \mathcal{A}$: $A = f^{-1}(B)$. Συμπεραίνουμε ότι $B^c \in \mathcal{B}$ (η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα) και

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c = A^c \in \mathcal{A},$$ αφού $A \in \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα. Τελικά $B^c \in \mathcal{B}'$. ✓

(γ) Έστω (B_n) μία τυχούσα ακολουθία στη $\mathcal{B}'$. Τότε $B_n \in \mathcal{B}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ και $\exists A_n \in \mathcal{A}$: $A_n = f^{-1}(B_n)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, έχουμε $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$ και

$$f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(B_n) = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A},$$ αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.

Τελικά $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}'$, και από (α),(β) και (γ) έχουμε ότι η $\mathcal{B}'$ είναι σ-άλγεβρα.

(ii) Κατ' αρχήν $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$

και η $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ είναι σ-άλγεβρα ως αντίστροφη εικόνα της $\sigma(\mathcal{E})$ που είναι σ-άλγεβρα. Άρα

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \quad (1).$$

Θέτουμε τώρα

$$\mathcal{B}' = \{ B \in \underbrace{\sigma(\mathcal{E})}_{\text{σ-άλγεβρα επί του } Y} : f^{-1}(B) \in \underbrace{\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))}_{\text{σ-άλγεβρα επί του } X} \}.$$

Απο το (i) η <u>$\mathcal{B}'$ είναι σ-άλγεβρα</u> επί του Y και <u>$\mathcal{E} \subset \mathcal{B}'$</u>, αφού $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$, και άρα $f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$, $\forall B \in \mathcal{E}$.

Από τα παραπάνω έχουμε $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}'$, και άρα

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \quad (2).$$

Απο (1) + (2) έπεται το ζητούμενο.

<u>Θέμα 2</u>

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρ. χώρος, και $(A_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Ν.δ.ο.

(i) υπάρχει μία ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ στην $\mathcal{A}$, ξένων ανά δύο συνόλων: $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

(ii) αν $\mu(A_n A_m) = 0$, $\forall n \neq m$, τότε

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Λύση 1.

(i) Έχει αποδειχθεί στη θεωρία του μαθήματος.

(ii) Η συνήθης απόδειξη για το (i) χρησιμοποιεί τα σύνολα $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$.

Επειδή για 2 σύνολα Γ, Δ ισχύει $\Gamma \setminus \Delta = \Gamma \setminus \Gamma\Delta$,

έχουμε $B_n = A_n \setminus A_n\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k A_n$, $\forall n=1,2,\dots$

Άρα $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ όπου τα B_n είναι όπως παραπάνω

και παρατηρούμε ότι $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k A_n\right) \overset{\text{υποπροσθ.}}{\leq} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k A_n) = 0$,

αφού $\mu(A_k A_n) = 0$, $\forall k \neq n$, από υπόθεση.

Τελικά $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k A_n\right) = 0$, και άρα

$$\mu(B_n) = \mu(A_n) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k A_n\right) = \mu(A_n), \ \forall n \geq 1 \quad (*)$$

αφού επιπλέον $\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k A_n \subset A_n$, $\forall n \geq 1$.

Επειδή τα (B_n) είναι και ξένα ανά δύο έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigcup_n B_n\right) \overset{\sigma\text{-προσθ.}}{=} \sum_n \mu(B_n) \overset{(*)}{=\!=} \sum_n \mu(A_n)$$

Θέμα 3 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο του μ, που ορίζεται από τη σχέση

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ και } A \subset B\}, \ \forall A \subset X.$$

Ν.δ.ο.

(α) $\forall A \subset X$, $\exists B \in \mathcal{A}$ με $A \subset B$ και $\mu^*(A) = \mu(B)$.

(β) για κάθε αύξουσα ακολουθία (A_n) ισχύει ότι

$$\mu^*(\lim_n A_n) = \lim_n \mu^*(A_n).$$

Λύση

(α) έχει δειχθεί στη θεωρία του μαθήματος.

(β) Κατ'αρχήν η $(A_n)\uparrow$ και λόγω μονοτονίας ενός εξωτ. μέτρου έχουμε ότι $\exists \lim_n \mu^*(A_n) \in [0,+\infty]$, και προφανώς

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu^*\left(\lim_n A_n\right) \quad \forall n=1,2,\ldots \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_n \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\lim_n A_n\right) \quad (1).}$$

Τώρα από το (α), $\forall n$, $\exists B_n \in \mathcal{A}$ με $A_n \subset B_n$ και $\boxed{\mu^*(A_n) = \mu(B_n) \quad (2)}$

Θέτουμε $\Gamma_n = \bigcap_{k\geq n} B_k$, $\forall n=1,2,\ldots$

Έχουμε ότι $A_n \overset{(A_n)\uparrow}{=} \bigcap_{k\geq n} A_k \overset{A_k \subset B_k}{\subset} \bigcap_{k\geq n} B_k = \Gamma_n \subset B_n$, $\forall n=1,2,\ldots$

$$\Rightarrow \mu^*(A_n) \leq \underset{\|\,\Gamma_n\in\mathcal{A}}{\mu^*(\Gamma_n)} \leq \underset{\|\,B_n\in\mathcal{A}}{\mu^*(B_n)} \Rightarrow$$

$$\mu^*(A_n) \leq \mu(\Gamma_n) \leq \mu(B_n) \overset{(2)}{=} \mu^*(A_n), \quad \forall n=1,2,\ldots$$

Τελικά $\boxed{\mu^*(A_n) = \mu(\Gamma_n), \quad \forall n=1,2\ldots \quad (3)}$

και αφού $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n \Gamma_n$, έχουμε

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_n \Gamma_n\right) \overset{\bigcup_n \Gamma_n\in\mathcal{A}}{=} \mu\left(\bigcup_n \Gamma_n\right) \overset{(\Gamma_n)\uparrow}{=} \lim_n \mu(\Gamma_n) \overset{(3)}{=} \lim_n \mu^*(A_n)$$

Φτάσαμε στο συμπέρασμα ότι $\left(\bigcup_n A_n = \lim_n A_n\right)$

$$\boxed{\mu^*\left(\lim A_n\right) \leq \lim_n \mu^*(A_n) \quad (4)}$$

Από τις (3) + (4) φτάνουμε στο ζητούμενο.

Θέμα 4 Έστω X σύνολο και ϕ ένα εξωτ. μέτρο ορισμένο στο δυναμοσύνολο του X.

(α) Πότε λέμε ότι ένα $B \subset X$ είναι ϕ-μετρήσιμο;

(β) Δώστε παράδειγμα χώρου X με τουλάχιστον 2 στοιχεία και ϕ εξωτ. μέτρου έτσι ώστε τα μόνα ϕ-μετρήσιμα σύνολα να είναι το $\emptyset$ και το X.

(γ) Έστω $X = \mathbb{R}$, C το σύνολο Cantor και $\phi = \lambda^*$ το εξωτ. μέτρο Lebesgue. Ν.δ.ο αν $A \supset \mathbb{R} \setminus C$, τότε το A είναι λ^*-μετρήσιμο. Να εξεταστεί αν είναι και σύνολο Borel.

Λύση

(α) Ένα $B \subset X$ είναι φ-μετρήσιμο αν $\forall A \subset X$, ισχύει η σχέση $\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B)$.

(β) Θέτουμε $X = \{1,2\}$ και

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty] \quad \text{με} \quad \varphi(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ 1 & , A \neq \emptyset \end{cases}$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι το φ είναι εξωτ. μέτρο στο X (το έχουμε δει και σε Παράδειγμα: $\varphi(\emptyset) = 0$, μονοτονία + σ-υποπροσθ.)

Όμως το φ δεν είναι μέτρο, αφού $\underset{\overset{\|}{1}}{\varphi(\{1,2\})} \neq \varphi(\{1\}) + \varphi(\{2\}) = 2$.

Άρα αναγκαστικά $\mathcal{M}_\varphi = \{\emptyset, X\}$ που είναι η μόνη επιλογή υπο σ-άλγεβρας από την $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \underset{X}{\{1,2\}}\}$

(γνωρίζουμε ότι $\mathcal{M}_\varphi \equiv$ συλλογή των φ-μετρήσιμων συνόλων είναι πάντα σ-άλγεβρα).

Διαφορετικά κάποιος θα μπορούσε να πει ότι αν $B = \{x\}$, όπου $x \in \{1,2\}$ και $A = X$, τότε

$\varphi(X) = 1$, και $\varphi(X \cap \{x\}) + \varphi(X \setminus \{x\}) = 1 + 1 = 2$, άρα δεν ικανοποιείται η σχέση του (α) και άρα $\mathcal{M}_\varphi = \{\emptyset, X\}$.

(γ) Το C που είναι το σύνολο Cantor, γνωρίζουμε ότι είναι ως κλειστό, λ^*-μετρήσιμο και μάλιστα $\lambda(C) = 0$.

Αν $B \subseteq C$, τότε λόγω της πληρότητας του μέτρου Lebesgue, ή από τη σχέση $\lambda^*(B) \leq \lambda^*(C) = \lambda(C) = 0 \Rightarrow$

$\lambda^*(B) = 0 \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ (αφού επαληθεύεται η σχέση (α)).

Αν $A \supset \mathbb{R} \setminus C \Rightarrow A^c = \mathbb{R} \setminus A \subseteq C$.

Για $B = A^c$, έχουμε από τα παραπάνω $B \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \Rightarrow$

$\underline{A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}}$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\exists B \subseteq C : B \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})$, διαφορετικά, θα ίσχυε ότι $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = 2^c = |\mathcal{M}_{\lambda^*}|$, αφού το C υπεραριθμήσιμο (άτοπο).

Άρα για $A = B^c$, έχουμε $A \supset \mathbb{R} \setminus C$ και

$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})$.