Θεωρία Μέτρου, Φεβρ. 2020

• Θέματα + Λύσεις + Σχολιασμός

Θέμα 1 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{R}$, μετρήσιμες συναρτήσεις με $\int |f_n| \, d\mu \leq \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ και θέτουμε $f = \sum_{n \geq 1} f_n$. Ν.δ.ο.

(α): η f ως πραγματική συνάρτηση είναι καλά ορισμένη μ-σχεδόν παντού και ολοκληρώσιμη

(β) $\int f \, d\mu = \sum_{n \geq 1} \int f_n \, d\mu$.

(γ) Να αναφερθούν (με αιτιολόγηση) 3 τρόποι σύγκλισης της $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ στην f.

(δ) Να δειχθεί ότι υπάρχει και να υπολογισθεί το παρακάτω όριο:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos^2(nx) \, dx$$

Λύση

(α) Ελέγχουμε πρώτα ότι έχει νόημα η έκφραση $f = \sum_{n\geq 1} f_n$.

• $$\int \underbrace{\sum_{n\geq 1} |f_n|}_{\substack{\text{θετικές} \\ +\text{μετρήσιμες}}} d\mu \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sum_{n\geq 1} \int |f_n|\, d\mu \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} |f_n| < +\infty \quad , \mu\text{-σχεδόν παντού} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f = \sum_{n\geq 1} f_n$ συγκλίνει απόλυτα, και άρα είναι καλά ορισμένη πραγματική συνάρτηση μ-σχεδόν παντού.

• Τώρα ελέγχουμε την ολοκληρωσιμότητά της. Η f είναι <u>μετρήσιμη</u> και

$$\int |f|\, d\mu = \int \Big|\sum_{n\geq 1} f_n\Big|\, d\mu \leq \int \sum_{n\geq 1} |f_n|\, d\mu < +\infty$$ (όπως παραπάνω)

$\Rightarrow f$ <u>ολοκληρώσιμη</u>

[είναι λάθος τυπικά να ξεκινήσουμε από αυτό, χωρίς να ελέγξουμε ότι η $\sum_n f_n$ είναι καλά ορισμένη]

(β)

Αν (S_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της f, τότε S_n μετρήσιμες, $\forall n\geq 1$ και προφανώς

$$S_n \longrightarrow f \quad , \mu\text{-σ.π.}$$ (η ίδια η f έχει νόημα μ-σ.π.)

Επιπλέον, $|S_n| \leq \sum_n |f_n|$, $\forall n \geq 1$

που είναι ολοκληρώσιμη

<u>Θεώρημα Κυριαρχ. Σύγκλισης</u> $\Longrightarrow$

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int S_n\, d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int f_k\, d\mu$$

$$= \sum_{n\geq 1} \int f_n\, d\mu$$

(γ) Ήδη αναφέραμε ότι $S_n \to f$ $\underline{\underline{\mu-\sigma.\pi.}}$

Επιπλέον, από το Θ.Κ.Σ. που εφαρμόσαμε, έχουμε ακόμα ότι

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1(\mu)} f \quad \left(\int |S_n - f|\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right), \text{ δηλ. σύγκλιση στον } \underline{\mathcal{L}^1(\mu)} .$$

Όμως $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1(\mu)} f \Rightarrow S_n \xrightarrow{\mu} f$, δηλ. και σύγκλιση <u>κατά μέτρο</u>.

(δ) Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \underbrace{\cos^2(nx)}_{\frac{1+\cos(2nx)}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx}_{A_n} + \underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(2nx)\, dx}_{B_n}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} A_n = \int_{[0,+\infty)} \underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)}_{\substack{f_n(x) \nearrow e^{-x} \\ (\geq 0)}}\, d\lambda(x) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης}} A_n \to \int_{[0,+\infty)} e^{-x}\, d\lambda(x) = 1$$

$$B_n = \frac{1}{2n}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \left(\sin(2nx)\right)' dx = \frac{1}{2n}\left[\underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \sin(2nx)\Big|_0^n}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \sin(2nx)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2n}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \sin(2nx)\, dx$$

Όμως
$$\left|\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \sin(2nx)\, dx\right| \leq \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \leq \int_0^n e^{-\frac{n-1}{n}x}\, dx \leq M$$
$$(1-y \leq e^{-y},\ y \geq 0)$$

Τελικά $\boxed{B_n \to 0}$ και άρα $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos^2(nx)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

<u>Σχόλιο</u>

Η απ' ευθείας μέθοδος $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x}$, $\chi_{[0,n]}(x) \to 1$

& $\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cdot \cos^2(nx)\right| \leq e^{-x}$ με $\int e^{-x} dx < +\infty$, δε δουλεύει,

αφού $\cos^2(nx)$ δε συγκλίνει και δε μπορούμε να εφαρμόσουμε Θ.Κ.Σ. απ' ευθείας.

Θέμα 2

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και μ_* το εσωτερικό μέτρο του μ, με

$$\mu_*(B) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A} \text{ και } A \subset B\}, \ \forall B \subset X.$$

Ν.δ.ο.

(α) αν $B \subset X$, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu_*(B) = \mu(A)$.

(β) αν $B_1, B_2 \subset X$ με $B_1 B_2 = \phi$, τότε $\mu_*(B_1 \cup B_2) \geqslant \mu_*(B_1) + \mu_*(B_2)$.

(γ) αν το μ_* είναι και εξωτερικό μέτρο, τότε το μ_* είναι μέτρο (σ-προσθετικό) στον $(X, \mathcal{P}(X))$

(δ) υπάρχει μέτρο μ και σύνολα B_1, B_2, για τα οποία η ανισότητα του (β) ικανοποιείται γνήσια

[αν χρειαστεί θεωρείστε γνωστό ότι
$\mu_*(B) + \mu^*(X \setminus B) = \mu(X)$, όπου μ^* το αντιστ. εξωτ. μέτρο του μ]

Λύση 1

(α)

- Αν $\mu_*(B) = +\infty$, τότε αναγκαστικά $\mu(X) = +\infty$, και $X \in \mathcal{A}$. Έτσι επιλέγουμε $A = X$

[Σχόλιο: μπορεί να επιλεγεί $A \in \mathcal{A}$ με $A \subset B$ και $\mu_*(A) = \mu_*(B) = +\infty$ $\longrightarrow$ δείξτε το]

- Αν $\mu_*(B) < +\infty$, τότε $\forall n \geq 1$, υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_n) > \mu_*(B) - \frac{1}{n}$ και $A_n \subset B$, $\forall n \geq 1$.

Θέτουμε $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ και έχουμε $A \subseteq B$ και

$$\mu(A) \geq \mu(A_n) > \mu_*(B) - \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1 \xRightarrow{\text{με όριο } n\to\infty}$$

$\mu(A) \geq \mu_*(B)$. Όμως προφανώς $\mu(A) \leq \mu^*(B)$, και άρα προκύπτει η ισότητα.

(β) - Αν $\mu_*(B_1)$ ή $\mu_*(B_2) = +\infty$, τότε η ανισότητα είναι προφανής, αφού άμεσα έχουμε ότι το μ_* είναι μονότονη συνολοσυνάρτηση $[A \subset B \Rightarrow \mu_*(A) \leq \mu_*(B)]$.

- Αν $\mu_*(B_1)$ και $\mu_*(B_2) < +\infty$, από την προηγ. απόδειξη και το (α), έχουμε ότι $\exists\, A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ με $A_1 \subset B_1$ και $A_2 \subset B_2$ και $\mu_*(B_1) = \mu(A_1)$, $\mu_*(B_2) = \mu(A_2)$.

Όμως $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, και $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2 \Longrightarrow$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 \subset B_1 \cup B_2$, με $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$,

άρα $\mu_*(B_1) + \mu_*(B_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \overset{A_1 A_2 = \emptyset}{=} \mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu_*(B_1 \cup B_2)$.

(γ) Αν το μ_* είναι και εξωτερικό μέτρο, τότε είναι σ-υποπροσθετικό, άρα και π-υποπροσθετικό, δηλ. (8)

$$\mu_*(B_1 \cup B_2) \leq \mu_*(B_1) + \mu_*(B_2).$$

Σε συνδυασμό με το (β), έχουμε $\forall B_1, B_2 \subset X$,

$$\mu_*(B_1 \cup B_2) = \mu_*(B_1) + \mu_*(B_2).$$

Επιπλέον $\mu_*(\emptyset) = 0$ (είτε απ'ευθείας από ορισμό, είτε ως εξωτερικό μέτρο).

Άρα το μ_* είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Έχουμε δείξει ότι αν ένα π-προσθετικό μέτρο, ορισμένο σε σ-άλγεβρα είναι σ-υποπροσθετικό, τότε <u>είναι μέτρο</u>.

[Βγαίνει βέβαια και άμεσα, από την σ-υποπροσθετικότητα &

$$\mu_*\left(\bigcup_n B_n\right) \geq \mu_*\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu_*(B_k), \ \forall n \geq 1, \text{ όταν } B_i B_j = \emptyset, \ i \neq j$$

παίρνοντας όριο με $n \to +\infty$.]

(δ) Μπορούμε να έχουμε από τετριμμένα μέχρι και πιο ενδιαφέροντα αντιπαραδείγματα. Τα πρώτα εξαρτώνται από την επιλογή της σ-άλγεβρας.

π.χ. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με X τουλάχιστον 2 στοιχεία,

$\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ και $\mu \neq 0$. Θέτουμε $X = B_1 \cup B_2$, διαμέριση του X [με $B_1, B_2 \neq \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = X$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$]

Έχουμε $\mu_*(B_1) = \mu_*(B_2) = 0$, αφού μόνο $\emptyset \subset B_1, B_2$, με $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Όμως $\mu_*(B_1 \cup B_2) = \mu_*(X) = \mu(X) > 0$, και έχουμε γνήσια ανισότητα

• Διαφορετικά: Έστω $([0,1], \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ με $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ τα L-μετρήσιμα στο $[0,1]$.

Δίνεται ότι αν $B \subset X$, τότε

$$\left.\begin{aligned} \mu_*(B) + \mu^*(B^c) &= \mu(X) \\ \mu_*(B) + \mu_*(B^c) &= \mu(X) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{πεπερασμένο}]{\text{αν } \mu} \mu_* = \mu^*$$

Επιπλέον αν αφήνθούμε γνήσια ανισότητα

καταλήγουμε στο ότι αν ένα εσωτερικό μέτρο ήταν π-προσθετικό, τότε το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο θα συμπίπτει με αυτό και ως σ-υποπροσθετικό, θα ήταν μέτρο στον $(X, \mathcal{P}(X))$.

Γνωρίζουμε ότι στον $([0,1], \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ αυτό είναι αδύνατο αφού το λ^* δεν είναι μέτρο στο $\mathcal{P}([0,1])$, άρα

$$\mathcal{M}_{\lambda^*} \subsetneq \mathcal{P}([0,1]).$$

$\boxed{\text{Θέμα 3}}$

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \longrightarrow f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Ν.δ.ο.

(α) υπάρχει μία φθίνουσα ακολ. (C_k) στην $\mathcal{A}$ έτσι ώστε $\mu(C_k) \longrightarrow 0$ και $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus C_k$.

(β) αν $f_n \longrightarrow f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \longrightarrow f$ μ-σ.π.

(γ) αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και το μ είναι πεπερασμένο, τότε $g \circ f_n \longrightarrow g \circ f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

[θεωρείστε γνωστό το Θεώρημα του Egoroff]

(δ) Ισχύει το (γ) για μη πεπερασμένα μέτρα ?

Λύση

(α) μία απόδειξη έγινε στο μάθημα (βλ. Καμουλλής + Νεγρεπ.)

Εναλλακτικά:

λόγω της υπόθεσης της σχεδόν ομοιόμορφης σύγκλισης,

$\exists\, (B_k)_{k\geq 1}$ με $B_k \in \mathcal{A}$ και $\mu(B_k) \leq \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 1$:

$$\sup_{x \in X \setminus B_k} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Θέτουμε $C_k = \bigcap_{m=1}^{k} B_m$, $\forall k \geq 1$.

Τότε $C_k \in \mathcal{A}$ και $\mu(C_k) \leq \mu(B_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Επιπλέον $(C_k)\downarrow$ όπως ζητείται.

Έχουμε $X \setminus C_k = \bigcup_{m=1}^{k} B_m^c$, $\forall k \geq 1$, και άρα

$$\sup_{x \in X \setminus C_k} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \bigcup_{m=1}^{k} B_m^c} |f_n(x) - f(x)| = \max_{1\leq m \leq k} \sup_{x \in B_m^c} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Τελικά $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus C_k$.

(β) Θέτουμε $C = \bigcap_{k\geq 1} C_k \in \mathcal{A}$ και $\mu(C) = \lim_k \mu(C_k) = 0$,

αφού $(C_k)\downarrow$ και $\mu(C_1) \leq 1 < +\infty$. Επιπλέον

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \text{ στο } X\setminus C_k,\ \forall k\geq 1 \implies f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f \text{ στο } X \setminus C_k,\ \forall k \geq 1$$

$$\implies f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f \text{ στο } \bigcup_{k\geq 1} (X \setminus C_k) = X \setminus \bigcap_{k \geq 1} C_k = X \setminus C .$$

Αφού $\mu(C) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $f_n \xrightarrow{\mu\text{-}\sigma.\pi.} f$.

(γ) μ πεπερασμένο $\Rightarrow$ σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση & σύγκλιση μ-σ.π. είναι ισοδύναμες.

Άρα αρκεί ν.δ.ο. $f_n \xrightarrow{\mu-\sigma.\pi.} f \Rightarrow g\circ f_n \xrightarrow{\mu-\sigma.\pi.} g\circ f$.

Όμως $f_n \xrightarrow{\mu-\sigma.\pi.} f \Rightarrow \mu([f_n \not\to f]) = 0$.

Αν $x \in [f_n \to f] \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \overset{g \text{ συνεχής}}{\Rightarrow} g\circ f_n(x) \to g\circ f(x)$.

Τελικά $\underset{\mathcal{A}}{\underset{\Uparrow}{[g\circ f_n \not\to g\circ f]}} \subseteq \underset{\mathcal{A}}{\underset{\Pi}{[f_n \not\to f]}} \Rightarrow$

$$\mu([g\circ f_n \not\to g\circ f]) = 0 \Rightarrow g\circ f_n \xrightarrow{\mu-\sigma.\pi.} g\circ f.$$

(δ) Θέτουμε $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$. Θα δείξουμε ότι δεν ισχύει.

Παίρνουμε $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, $f(x) = x$.

Τότε $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \to f$ ομοιόμορφα,

άρα και σχεδόν ομοιόμορφα. Αν $g(x) = x^2$, τότε g συνεχής.

Έχουμε $(g\circ f_n)(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}$, $(g\circ f)(x) = x^2$.

Άρα $|g\circ f_n(x) - g\circ f(x)| = \left|\frac{2}{n}\cdot x + \frac{1}{n^2}\right|$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Έχουμε $\left|\frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}\right| \geq \varepsilon \iff x \in \left(-\infty, -\frac{n\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \cup \left(\frac{n}{2}\varepsilon - \frac{1}{2n}, +\infty\right)$.

Άρα $\forall \varepsilon > 0$,

$\lambda\left[|g\circ f_n - g\circ f| \geq \varepsilon\right] = +\infty$. Συμπεραίνουμε ότι

$g\circ f_n \overset{\lambda}{\not\to} g\circ f \Rightarrow g\circ f_n \not\to g\circ f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Θέμα 4

Έστω $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ένας χώρος μέτρου, όπου $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$ και μ ένα μη μηδενικό μέτρο.

Έστω επίσης $(A_n)_{n \geq 0}$ η εξής ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$, $2 \cdot \mathbb{N}$, $2 \cdot \mathbb{N} + 1$, $3 \cdot \mathbb{N}$, $3 \cdot \mathbb{N} + 1$, $3 \cdot \mathbb{N} + 2$, $4\mathbb{N}$, $4\mathbb{N} + 1$, $4\mathbb{N} + 2$, $4 \cdot \mathbb{N} + 3, \dots$

Θέτουμε $(f_n)_{n \geq 0}$ την ακολουθία των χαρακτηρ. συναρτήσεων που αντιστοιχεί στη $(A_n)_{n \geq 0}$.

(α) Να υπολογιστούν τα σύνολα $\liminf A_n$ και $\limsup A_n$

(β) Να δειχθεί ότι η (f_n) δεν μπορεί να συγκλίνει μ-σ.π.

(γ) Να δειχθεί ότι η (f_n) δεν συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά μέτρο.

(δ) Να βρεθεί (g_n) υπακολουθία της (f_n) που συγκλίνει μ-σ.π. στη μηδενική συνάρτηση. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (g_n) συγκλίνει και κατά μέτρο?

(ξεχωρίστε περιπτώσεις για μ πεπερασμένο ή μη πεπερασμένο)

Λύση

(α) Θεωρούμε την εξής τριγωνική διάταξη της $(A_n)_{n\geq 0}$.

$$\begin{array}{llll} \mathbb{N} & & & \\ 2\cdot\mathbb{N} & 2\cdot\mathbb{N}+1 & & \\ 3\cdot\mathbb{N} & 3\cdot\mathbb{N}+1 & 3\cdot\mathbb{N}+2 & \\ 4\cdot\mathbb{N} & 4\cdot\mathbb{N}+1 & 4\cdot\mathbb{N}+2 & 4\cdot\mathbb{N}+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \end{array}$$

$$\liminf A_n = \{ k \in \mathbb{N} : k \in A_n \text{ τελικά } \forall n \}.$$

$$\limsup A_n = \{ k \in \mathbb{N} : k \in A_n \text{ για άπειρα } n \}.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία διαμέριση του $\mathbb{N}$.

Έτσι $k \in A_n$, για άπειρα n, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον $k \notin A_n$, για άπειρα n.

Τελικά $\liminf A_n = \emptyset$, $\limsup A_n = \mathbb{N}$.

(β) $\liminf \chi_{A_n} = \chi_{\liminf A_n} = \chi_{\emptyset} = 0$.

$\limsup \chi_{A_n} = \chi_{\limsup A_n} = \chi_{\mathbb{N}} = 1$.

$$\mu\left(\liminf \chi_{A_n} \neq \limsup \chi_{A_n}\right) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{αφού διαφέρουν παντού}}}{\mu(\mathbb{N})} > 0 \quad \underline{\text{από υπόθεση}}.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η $f_n = \chi_{A_n}$ δε συγκλίνει μ-σ.π.

[αν η f_n συγκλίνει μ-σ.π. τότε θα έπρεπε
$\mu\left(\liminf f_n \neq \limsup f_n\right) = 0$]

(γ) Από υπόθεση $\mu \neq 0$, άρα $\exists\, k \in \mathbb{N} : \mu(\{k\}) > 0$.

Αν $f_n \longrightarrow 0$, κατά μέτρο, τότε $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu(|f_n| > \varepsilon) = \mu(\mathcal{X}_{A_n} > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Ιδιαιτέρως για $0 < \varepsilon < 1$, αυτό δίνει

$$\mu(\mathcal{X}_{A_n} > \varepsilon) = \mu(\mathcal{X}_{A_n} = 1) = \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Επειδή $k \in A_n$, για άπειρα n, έχουμε

$$\mu(A_n) \geq \mu(\{k\}) \text{ για άπειρα } n \Rightarrow \mu(A_n) \not\longrightarrow 0 .$$

[εδώ $\limsup_n \mu(A_n) \geq \mu(\{k\}) > 0$].

(δ) • Αρκεί να βρεθεί μία υπακολουθία (B_n) της (A_n)

με $B_n \longrightarrow \emptyset$, καθώς $n \to \infty$.

Αφού τότε $\mathcal{X}_{B_n} \longrightarrow \mathcal{X}_\emptyset = 0$ [έχουμε $B_n \to B \Leftrightarrow \mathcal{X}_{B_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathcal{X}_B$ και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu\text{-}\sigma.\pi.} f$]

Αρκεί λοιπόν $\limsup_n B_n = \emptyset$,

[αφού τότε $\emptyset \subset \liminf B_n \subset \limsup B_n = \emptyset \Rightarrow \liminf B_n = \limsup B_n = \emptyset$]

Υπάρχουν αρκετές τέτοιες επιλογές. Εύκολα βλέπουμε ότι η "διαγώνιος" π.χ. $\mathbb{N}$, $2\cdot\mathbb{N}+1$, $3\cdot\mathbb{N}+2$, $4\cdot\mathbb{N}+3$, ... ικανοποιεί το ζητούμενο. Πράγματι αν $k \in \mathbb{N}$, τότε

$$k \notin m\cdot\mathbb{N} + (m-1) , \quad \forall m > k+1 ,$$

αφού το ελάχιστο στοιχείο του $m\cdot\mathbb{N} + m-1$, είναι το $m-1$ και έτσι αν $m > k+1 \Rightarrow m-1 > k$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_n B_n = \emptyset .$$

• Αν μ πεπερασμένο, τότε $g_n \xrightarrow{\mu\text{-}\sigma.\pi.} 0 \Rightarrow g_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Αν μ άπειρο, π.χ. αριθμητικό, τότε $\mu(B_n) = +\infty \not\longrightarrow 0$.

άρα $g_n \xrightarrow{\mu\text{-}\sigma.\pi.} 0 \not\Rightarrow g_n \xrightarrow{\mu} 0$.