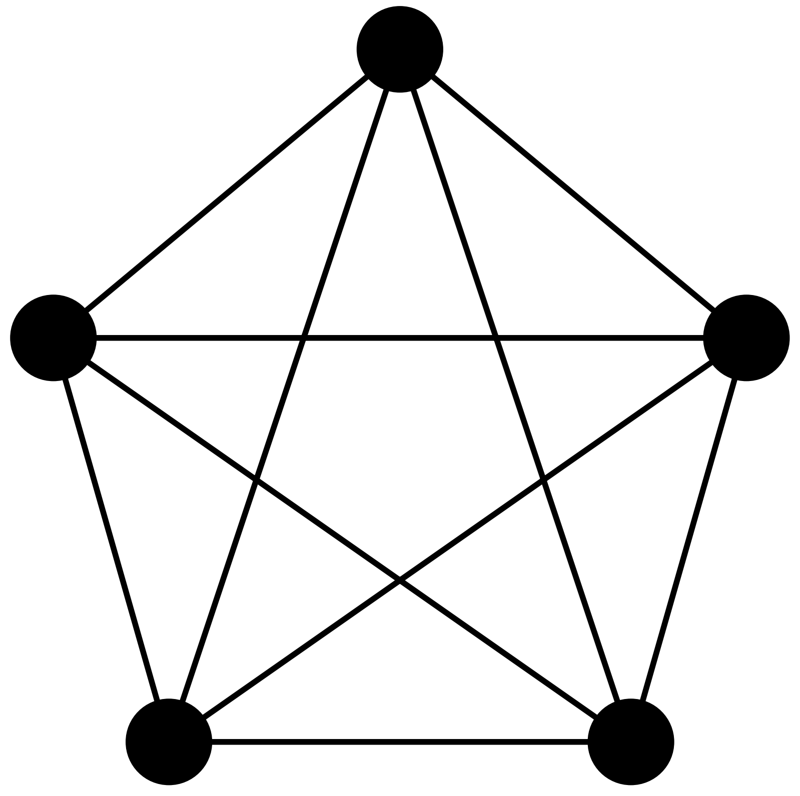
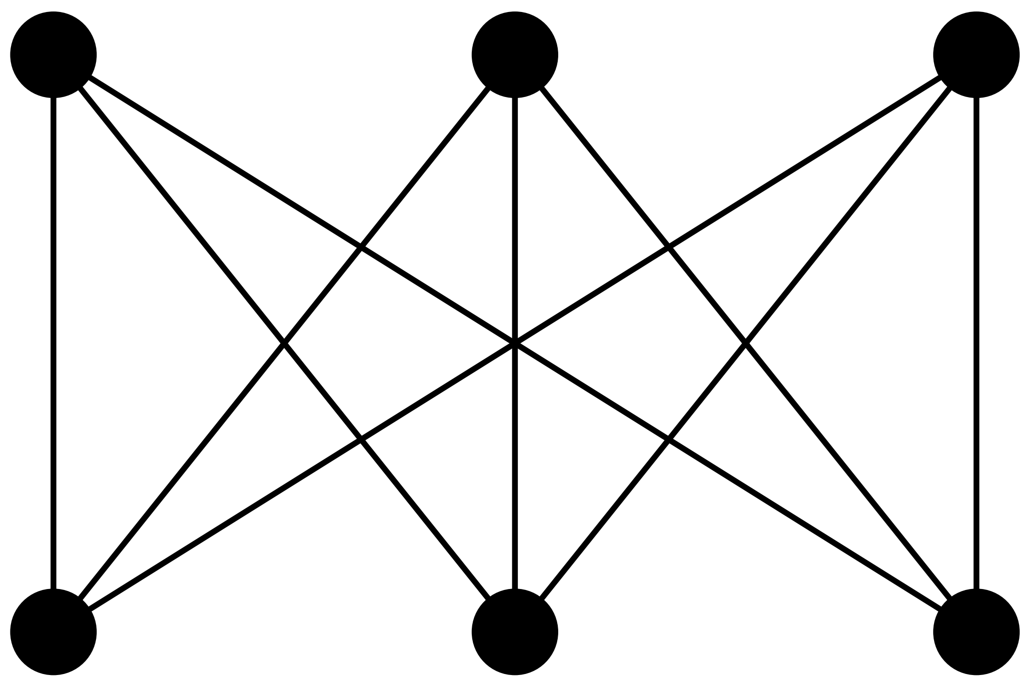
«Εικασία» του Wagner
και
Χαρακτηρισμοί Kuratowski

Θεώρημα (Kuratowski-Понтрягин). Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα από τα K_5, $K_{3,3}$ ως τοπολογικό έλασσον.

Θεώρημα (Wagner). Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα από τα K_5, $K_{3,3}$ ως έλασσον.

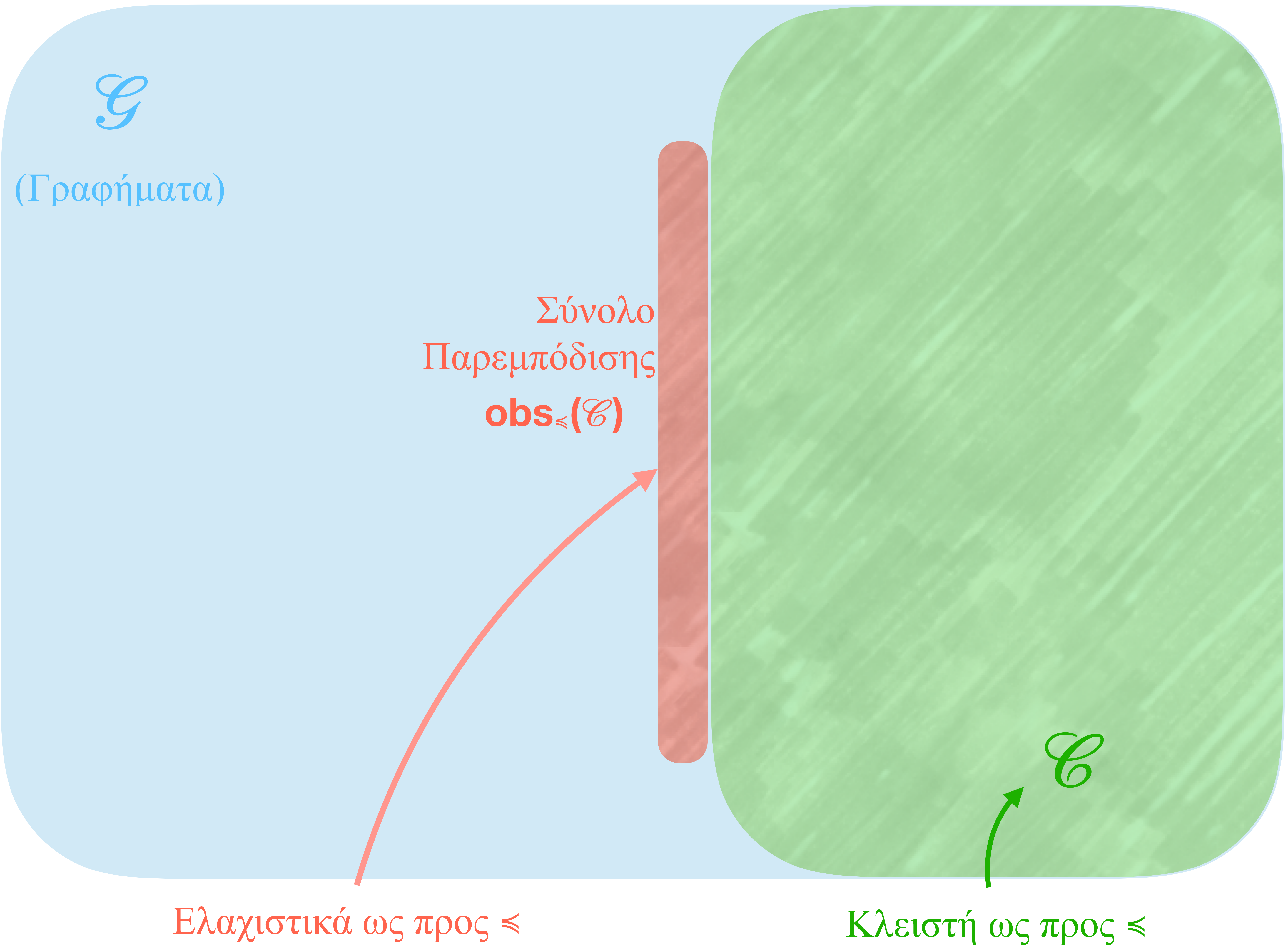


K_5



$K_{3,3}$

Απαγορευμένα Γραφήματα



$\mathcal{G}$
(Γραφήματα)
Σύνολο
Παρεμπόδισης
$\mathbf{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})$
$\mathscr{C}$
Ελαχιστικά ως προς $\preccurlyeq$
Κλειστή ως προς $\preccurlyeq$

$\mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})$

Σύνολο παρεμπόδισης της $\mathscr{C}$ ως προς την σχέση $\preccurlyeq$

$$G \in \mathscr{C} \iff \forall O \in \mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C}) \colon O \not\preccurlyeq G$$

$\mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})$

Σύνολο παρεμπόδισης της $\mathscr{C}$ ως προς την σχέση $\preccurlyeq$

$$G \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \forall O \in \mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})\colon O \not\preccurlyeq G$$

$$\Rightarrow$$

$\mathscr{C}$ κλειστή ως προς $\preccurlyeq$

$\mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})$

Σύνολο παρεμπόδισης της $\mathscr{C}$ ως προς την σχέση $\preccurlyeq$

$$G \in \mathscr{C} \iff \forall O \in \mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C}) : O \not\preccurlyeq G$$

$$\Leftarrow$$

$\mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})$ ελαχιστικά ως προς $\preccurlyeq$

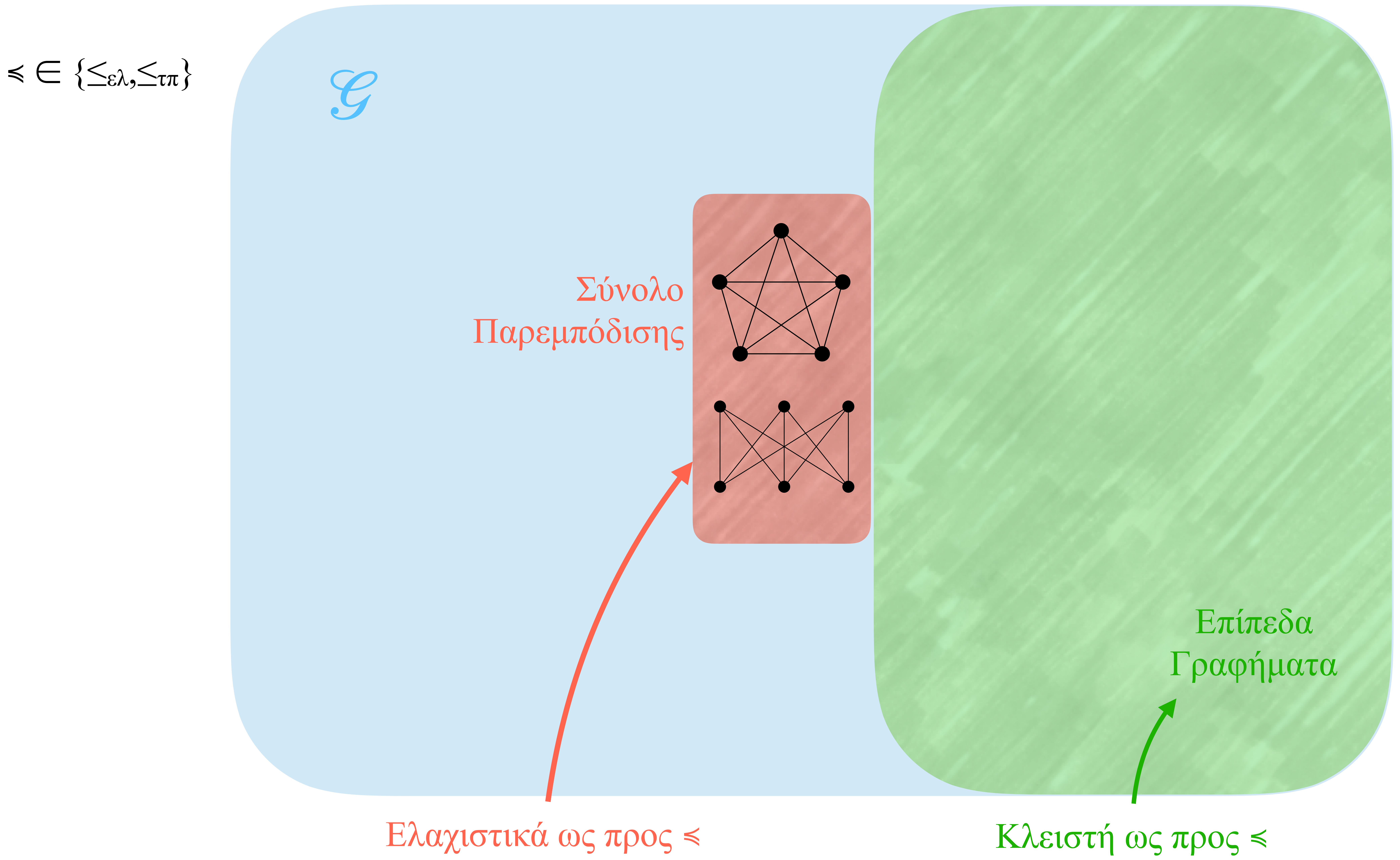
$\mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})$

Σύνολο παρεμπόδισης της $\mathscr{C}$ ως προς την σχέση $\preccurlyeq$

$$G \in \mathscr{C} \iff \forall O \in \mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C}): O \not\preccurlyeq G$$

Ερώτημα: Είναι το $\boxed{\mathrm{obs}_{\preccurlyeq}(\mathscr{C})}$ πεπερασμένο;

«Χαρακτηρισμός Kuratowski»



$\preccurlyeq \in \{\leq_{\varepsilon\lambda}, \leq_{\tau\pi}\}$
$\mathcal{G}$
Σύνολο
Παρεμπόδισης
Επίπεδα
Γραφήματα
Ελαχιστικά ως προς $\preccurlyeq$
Κλειστή ως προς $\preccurlyeq$

Χαρακτηρισμοί Kuratowski:

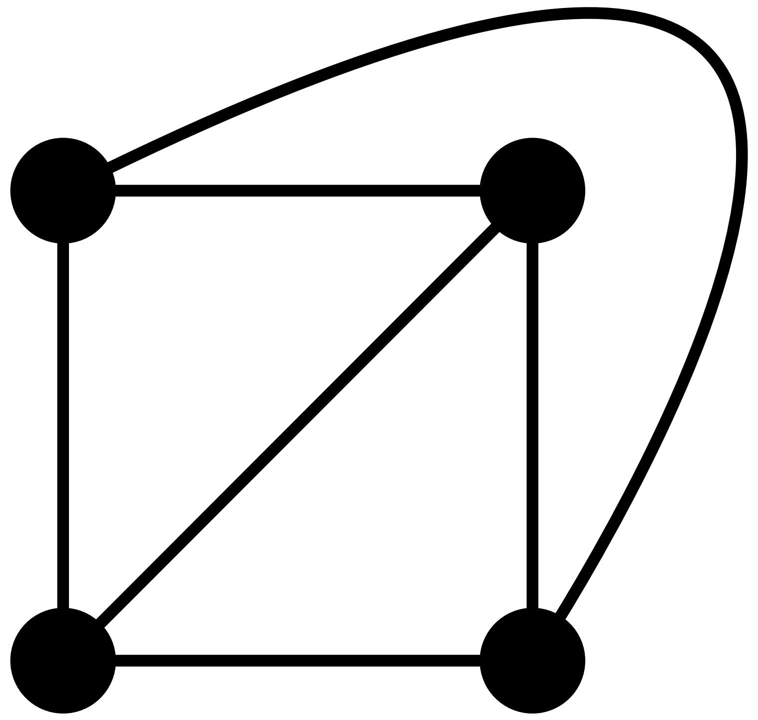
Κύκλοι — Όχι κλειστή ως προς $\subseteq_{\epsilon\nu}$, $\subseteq_{\pi\alpha}$, $\subseteq_{\upsilon\pi}$, $\leq_{\epsilon\lambda}$, $\leq_{\tau\pi}$

Δάση — Κλειστή ως προς $\subseteq_{\epsilon\nu}$, $\subseteq_{\pi\alpha}$, $\subseteq_{\upsilon\pi}$, $\leq_{\epsilon\lambda}$, $\leq_{\tau\pi}$

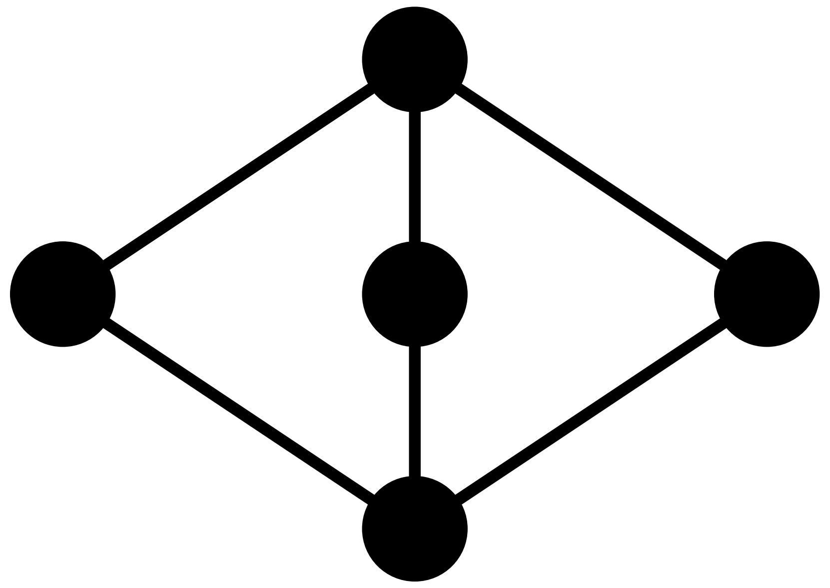
$\subseteq_{\epsilon\nu}$	$\subseteq_{\pi\alpha}$	$\subseteq_{\upsilon\pi}$	$\leq_{\epsilon\lambda}$	$\leq_{\tau\pi}$
Κύκλοι	Κύκλοι με απομονωμένες κορυφές	Κύκλοι	K_3	K_3
Άπειρος χαρακτηρισμός Kuratowski			Πεπερασμένος χαρακτηρισμός	

Χαρακτηρισμοί Kuratowski:

Θεώρημα. Ένα γράφημα είναι εξωεπίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα από τα K_4, $K_{2,3}$ ως τοπολογικό έλασσον.



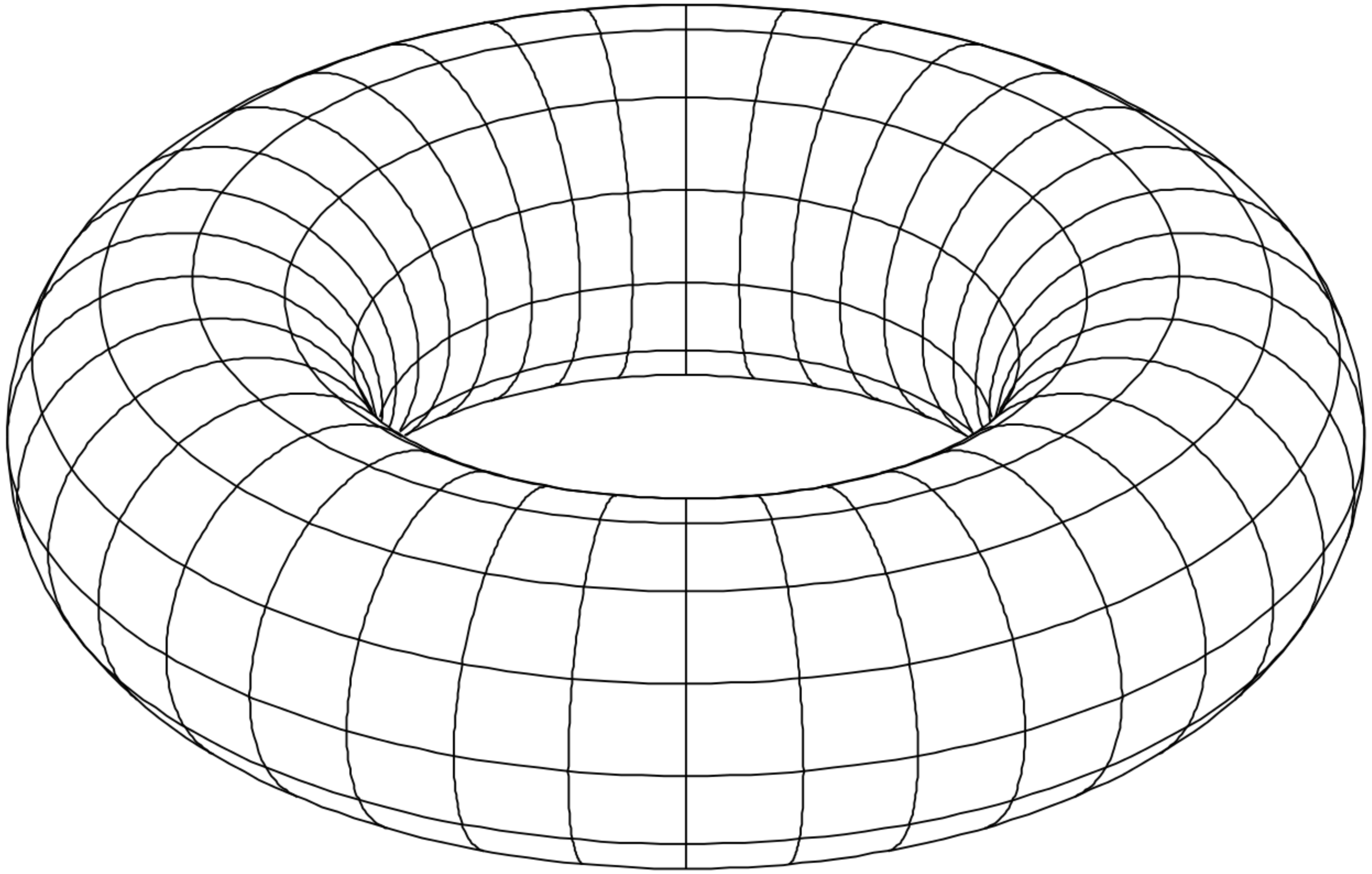
K_4



$K_{2,3}$

Υπάρχει πεπερασμένος χαρακτηρισμός Kuratowski για τα γραφήματα που εμβαπτίζονται σε άλλες επιφάνειες;

≤ελ



≥ 17.523
Γραφήματα

Ορισμός. Έστω σύνολο X. Μία μεταβατική και ανακλαστική (διμελής) σχέση $\preccurlyeq$ μεταξύ των στοιχείων του X καλείται μερική διάταξη.

Αν επιπλέον ισχύει ότι:

Για κάθε άπειρο $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq X$ υπάρχουν $i<j$ τέτοια ώστε $x_i \preccurlyeq x_j$

τότε το X είναι καλώς μερικά διατεταγμένο ως προς την $\preccurlyeq$.

Ισοδύναμα:

Το X δεν περιέχει άπειρη αντι-αλυσίδα ούτε άπειρη γνησίως φθίνουσα ακολουθία.

Στοιχεία $x_1, x_2, \ldots \in X$ που για κάθε $i<j$:

$x_i \not\preccurlyeq x_j$ **και** $x_j \not\preccurlyeq x_i$

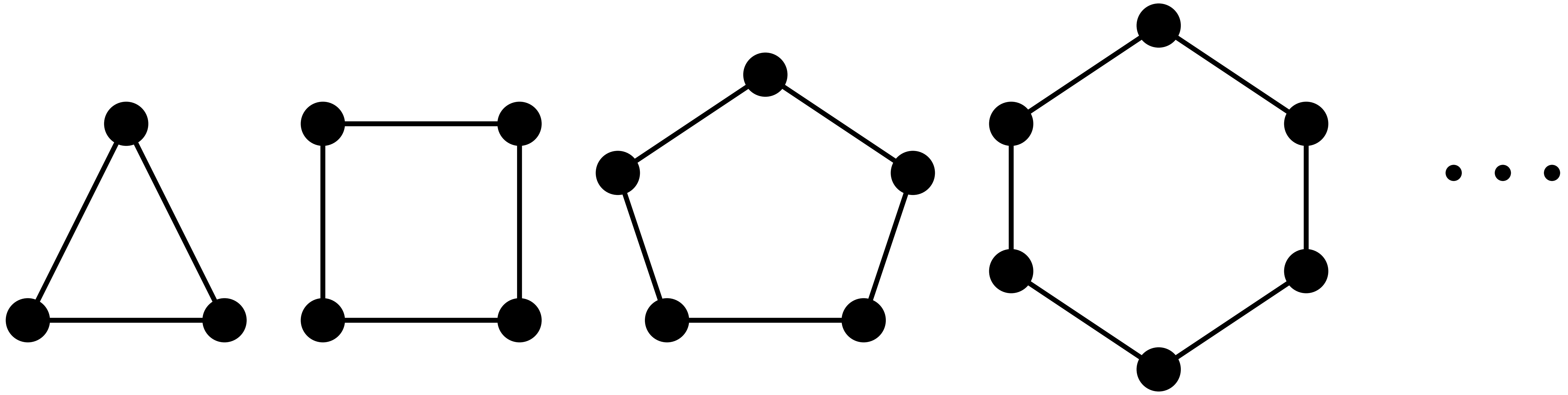
Στοιχεία $x_1, x_2, \ldots \in X$ τέτοια ώστε:

$x_1 \not\succcurlyeq x_2 \not\succcurlyeq x_3 \not\succcurlyeq \ldots$

Παραδείγματα:

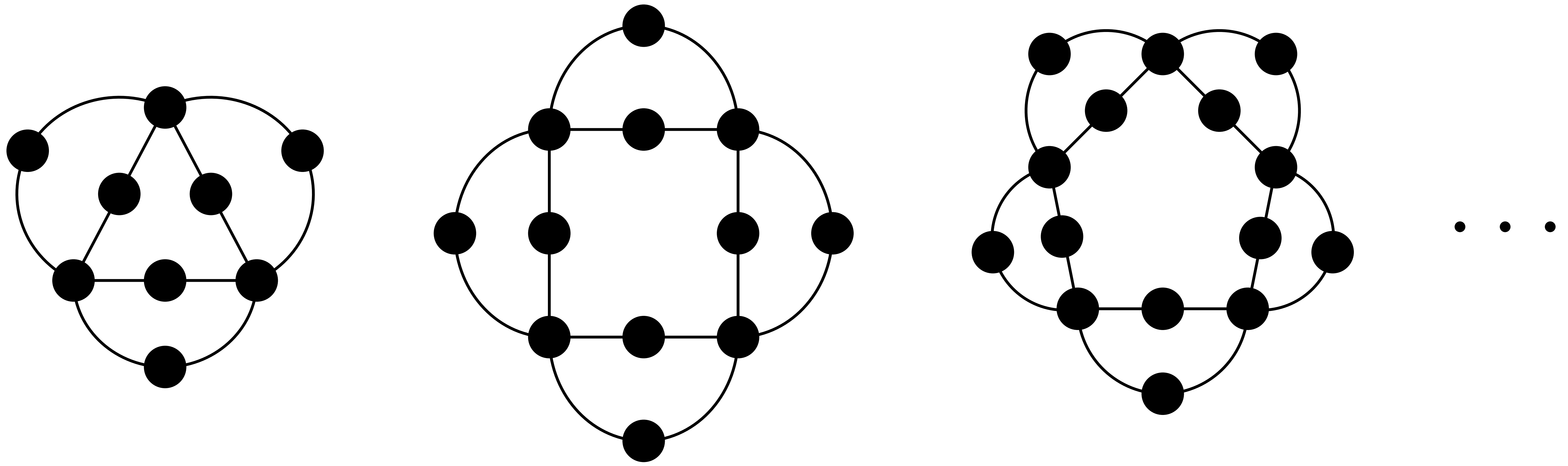
(Αντιαλυσίδα)

- $\mathbb{N}$ με $\leq$
- $2^{\mathbb{N}}$ με $\subseteq$: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots.$
- $\mathscr{G}$ με $\subseteq_{\text{εν}}$, $\subseteq_{\text{πα}}$, $\subseteq_{\text{υπ}}$:



- $\mathcal{G}$ με $\leq_{\tau\pi}$:

(Αντιαλυσίδα)



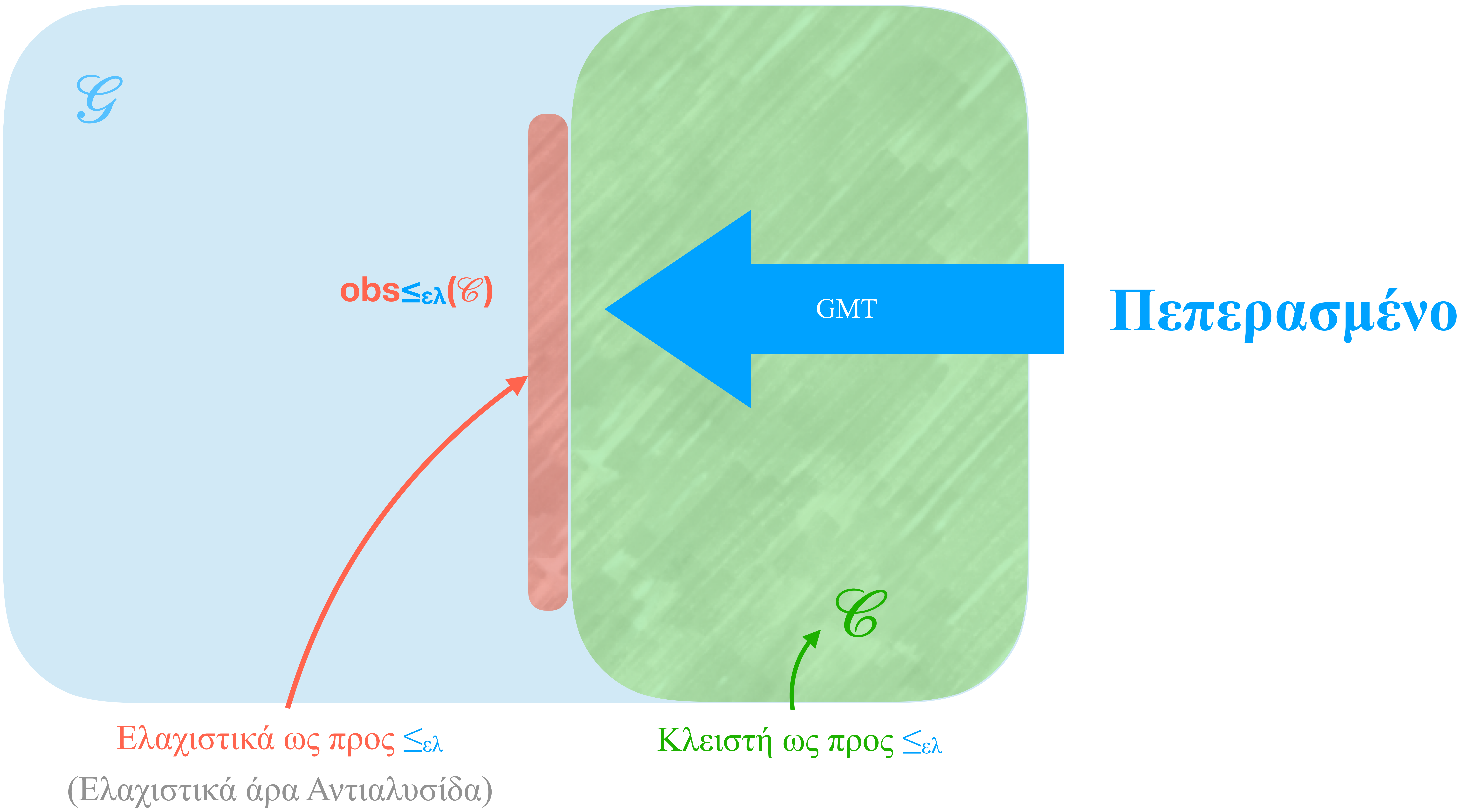
- $\mathcal{G}$ με $\leq_{\varepsilon\lambda}$;

Εικασία (Wagner?!)**.** Η κλάση όλων των γραφημάτων είναι καλώς μερικά διατεταγμένη ως προς $\leq_{\varepsilon\lambda}$.

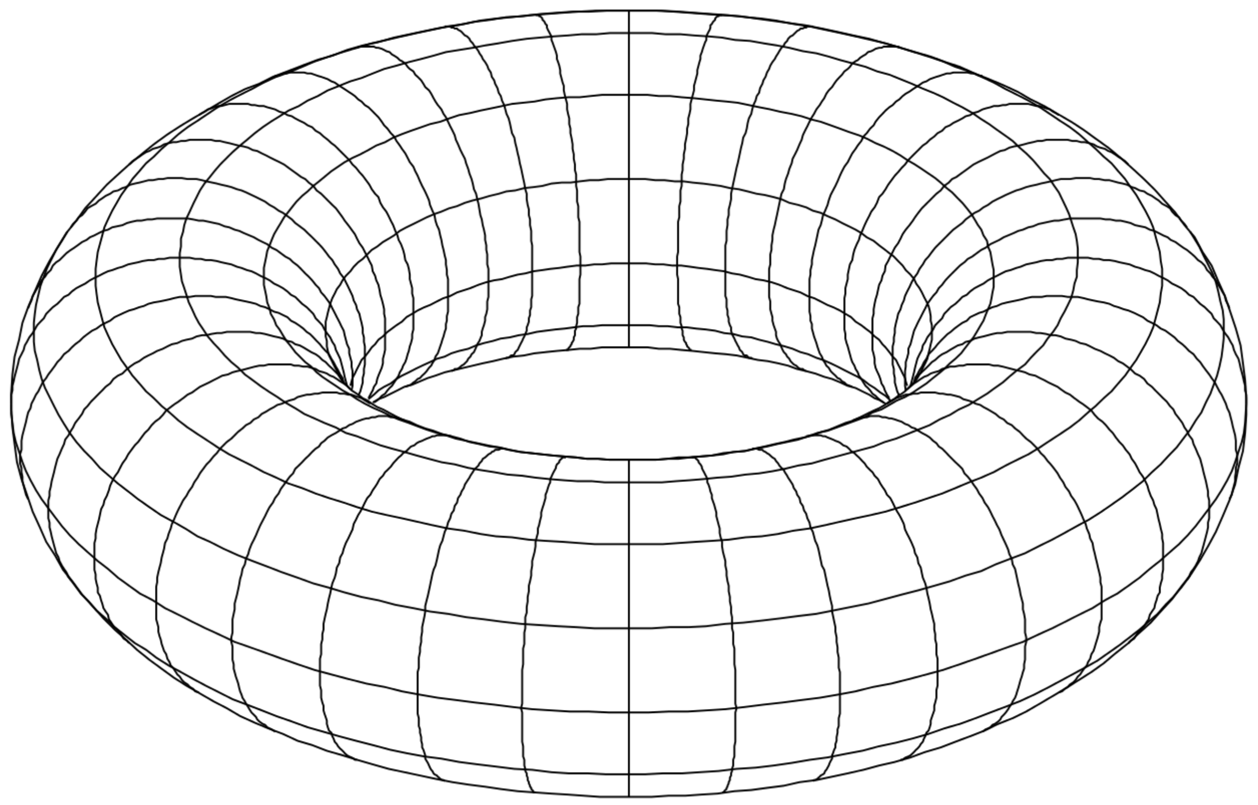
Θεώρημα (GMT, Robertson, Seymour 1983-2012)**.** Η κλάση όλων των γραφημάτων είναι καλώς μερικά διατεταγμένη ως προς $\leq_{\varepsilon\lambda}$.

- **23 εργασίες**
- **Από το 1983 έως το 2012**
- **Παραπάνω από 500 σελίδες**

Πως συνδέεται με τους χαρακτηρισμούς Kuratowski;


$\mathscr{G}$
obs$_{\leq_{\varepsilon\lambda}}(\mathscr{C})$
GMT
Πεπερασμένο
$\mathscr{C}$
Ελαχιστικά ως προς $\leq_{\varepsilon\lambda}$
(Ελαχιστικά άρα Αντιαλυσίδα)
Κλειστή ως προς $\leq_{\varepsilon\lambda}$

Πόρισμα. Κάθε κλάση που είναι κλειστή ως προς $\leq_{\varepsilon\lambda}$ έχει πεπερασμένο χαρακτηρισμό Kuratowski.



Η κλάση, έστω $\mathscr{C}$, των γραφημάτων που μπορούν να εμβαπτιστούν στον Τόρο είναι κλειστή ως προς ελάσσονα

$\Big\Downarrow$ GMT

obs$_{\leq_{\varepsilon\lambda}}(\mathscr{C})$ πεπερασμένο

$|\text{obs}_{\leq_{\varepsilon\lambda}}(\mathscr{C})| \geq 17.523$

(**Πόρισμα.** Η κλάση των γραφημάτων που εμβαπτίζονται σε επιφάνεια φραγμένου γένους έχει πεπερασμένο χαρακτηρισμό Kuratowski.)

GMT

Η απόδειξη του GMT δεν είναι κατασκευαστική

Η απόδειξη του GMT δεν μπορεί να γίνει κατασκευαστική