373. ΘΕΩΡΊΑ ΓΡΑΦΗΜΆΤΩΝ

Εργασία, Χειμερινό Εξάμηνο 2024-25

Γιάννης Λιβιεράτος
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών

Παράδοση έως 12/01/2025

- Η εργασία προσφέρει έως και μία έξτρα μονάδα στον βαθμό της εξέτασης.
- Δεν απαιτείται να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
- Η παρουσίαση άσκησης/ασκήσεων στην τάξη προσφέρει έως και άλλη μία μονάδα.
- Παράδοση εργασιών:
  - δια ζώσης στο μάθημα,
  - γραφείο 306 κάτω από την πόρτα,
  - e-mail στο jlivier89@math.uoa.gr
- Όλα τα είδη αρχείων θα γίνουν δεκτά, αρκεί να διαβάζονται.

Άσκηση 1: Να δείξετε τα ακόλουθα, για γράφημα $G = (V, E)$:

(i) Έστω ότι το G περιέχει κύκλο C και μονοπάτι μήκους τουλάχιστον k μεταξύ δύο κορυφών του C. Να δείξετε ότι το G περιέχει κύκλο μήκους τουλάχιστον $\sqrt{k}$.

(ii) Έστω G συνεκτικό. Τότε $n(G) \geq \mathrm{diam}(G) \cdot \delta(G)/3$.

Άσκηση 2: Να δείξετε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει μονοπάτι ή κύκλο μήκους τουλάχιστον $\min\{2 \cdot \delta(G), |V(G)|\}$.

Άσκηση 3: Έστω $G = (V, E)$ k-συνεκτικό, με $k \geq 2$. Να δείξετε ότι:

- Αν $n(G) \geq 2k$, τότε το G περιέχει κύκλο μήκους τουλάχιστον $2k$.
- Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$. Τότε, υπάρχει κύκλος C στο G έτσι ώστε $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V(C)$.

Άσκηση 4: Να δείξετε ότι κάθε επίπεδο γράφημα είναι η ένωση τριών δασών, δηλαδή γραφημάτων χωρίς κύκλους.

Άσκηση 5: Χωρίς χρήση του Θεωρήματος Kuratowski, να αποδείξετε ότι:

- Κάθε έλασσον ενός επίπεδου γραφήματος είναι επίπεδο.
- Ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνον αν είναι έλασσον μιας σχάρας.

Άσκηση 6: Ένα γράφημα λέγεται εξω-επίπεδο αν μπορεί να σχεδιαστεί έτσι ώστε κάθε κορυφή να βρίσκεται στην εξωτερική του όψη. Να δείξετε ότι ένα γράφημα είναι εξω-επίπεδο αν και μόνον αν δεν περιέχει ούτε το K_4, ούτε το $K_{2,3}$ ως έλασσον.

Άσκηση 7: Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Ένας χρωματισμός των ακμών του G με k χρώματα είναι μία συνάρτηση $\chi : E \to \{1, \ldots, k\}$ τέτοια ώστε $\chi(\{u, v\}) \neq \chi(\{z, w\})$ για κάθε $u, v, z, w \in \mathcal{V}$ με $\{u, v\} \cap \{z, w\} \neq \emptyset$. Να δείξετε ότι αρκούν $2\Delta - 1$ χρώματα ώστε να έχουμε χρωματισμό ακμών του G χωρίς να προκύπτουν διχρωματικοί κύκλοι μήκους 4.

Άσκηση 8: Ένα γράφημα $G = (V, E)$ με χρωματικό αριθμό k λέγεται κρίσιμο αν $\chi(G - v) < k$ για κάθε $v \in V(G)$.

(i) Βρείτε τα κρίσιμα γραφήματα με χρωματικό αριθμό 3.

(ii) Να δείξετε ότι κάθε κρίσιμο γράφημα με χρωματικό αριθμό k είναι $(k-1)$-συνεκτικό ως προς ακμές.

Άσκηση 9: Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $k \in \mathbb{N}$. Έστω $P_G(k)$ το χρωματικό πολυώνυμο του G, δηλαδή η συνάρτηση που μας δίνει το πλήθος των διαφορετικών k-χρωματισμών $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ του G.

- Να δείξετε ότι το $P_G(k)$ είναι πράγματι πολυώνυμο ως προς k, βαθμού $n(G)$, με τον συντελεστή του k^n να είναι 1 και του k^{n-1} να είναι $-m(G)$.
- Να βρείτε την κλάση των γραφημάτων με $P_G(k) = k(k-1)^{n(G)-1}$.

Άσκηση 10: Κατασκευάστε ένα k-χρωματικό γράφημα χωρίς τρίγωνα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 11: Έστω $\mathrm{ex}(n, H)$ το μέγιστο πλήθος ακμών ενός G με H υπογράφημα του G και $n(H) =$

$n(G)$. Το γράφημα G λέγεται ακραίο.

- Να δείξετε ότι το $_{1,3}$ είναι ακραίο, χωρίς να περιέχει μονοπάτι τριών κορυφών.
- Να βρείτε όλα τα ακραία γραφήματα με χρωματικό αριθμό το πολύ k.
- Υπάρχει μεγιστικό, ως προς πλήθος ακμών, γράφημα χωρίς το K_3 ως έλασσον, που να μην είναι ακραίο;

Άσκηση 12: Βρείτε το $\mathrm{ex}(n, K_{1,r})$, για κάθε $r, n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 13: Χωρίς χρήση του Θεωρήματος Turan, να δείξετε ότι το μέγιστο πλήθος ακμών σε ένα G χωρίς τρίγωνα, είναι $\lfloor n(G)^2/4 \rfloor$.

Άσκηση 14: Ισχύει πως ένα γράφημα με το πολύ $c \cdot n(G)$ ακμές, με το c οποιαδήποτε σταθερά και $n(G) \geq n_0$, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, περιέχει ανεξάρτητο σύνολο 100 κορυφών;

Άσκηση 15: Αποδείξτε το Θεώρημα Erdos-Posa: υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για δοθέν k, κάθε γράφημα περιέχει είτε k κύκλους χωρίς κοινές ακμές, είτε σύνολο με το πολύ $g(k)$ ακμές που τέμνεται με κάθε κύκλο του.