ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

6.1 Θεωρείστε το ακόλουθο πολυμεταβλητό υπόδειγμα:

$$\underset{(Tx1)}{y} = \underset{(Txk)}{X}\underset{(kx1)}{\beta} + \underset{(Tx1)}{\varepsilon}\ ,\ t = 1,2,...,T$$

όπου $V(\varepsilon) = \mathrm{E}(\varepsilon\varepsilon') = \underset{(TxT)}{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \underset{(T_1xT_1)}{I} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \underset{(T_2xT_2)}{I} \end{bmatrix}$, με $T_2 = T - T_1$. Το υπόδειγμα αυτό παρουσιάζει μια αλλαγή στη διακύμανση στο χρονικό σημείο $T_1 + 1$. Βρείτε την μήτρα μετασχηματισμού P που χρειαζόμαστε για να κατασκευάσουμε τον GLS εκτιμητή.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η μήτρα P θα ικανοποιεί τη σχέση $P'P = \Omega^{-1}$. Γράψτε τη μήτρα Ω στην αναλυτική της μορφή:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sigma_1^2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \sigma_2^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \sigma_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι επειδή Ω είναι διαγώνια μήτρα, η αντίστροφη είναι:

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1^2} & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

και μπορεί να γραφτεί ως το γινόμενο των μητρών:

$$\Omega^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}=P'P$$

όπου

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}$$

6.2 Θεωρήστε το γραμμικό υπόδειγμα $y_t=\beta_1+\beta_2 x_t+\varepsilon_t$ όπου $Var\left(\varepsilon_t\right)=\sigma^2 x_t^{\gamma}$, $t=1,2,\ldots,T$. Βρείτε τη μήτρα $\underset{(TxT)}{P}$ που χρειαζόμαστε για την κατασκευή του GLS εκτιμητή.

Λύση
Πρώτα παρατηρείστε ότι η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου Ω και η αντίστροφή της δίνονται ως:

$$\Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} x_1^\gamma & 0 & ... & 0 \\ 0 & x_2^\gamma & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & x_T^\gamma \end{bmatrix} \text{ και } \Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^\gamma} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^\gamma} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{x_T^\gamma} \end{bmatrix}.$$

Βάσει της σχέσης $P'P = \Omega^{-1}$, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η μήτρα P δίνεται ως:

$$P = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_1^\gamma}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_2^\gamma}} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{\sqrt{x_T^\gamma}} \end{bmatrix}$$