Διάλεξη 1 – Το Πρόβλημα των δύο σωμάτων

Νεύτων – Principia ($\simeq$ 1700)

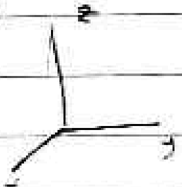
Hubbard – West, σ. 38 (από (26) και μετά)
μέχρι σ. 47, τέλος 6.7.

(βλ. βιντεοσκοπημένη Διάλεξη 1)

1. Κεντρική Δύναμη

(1) $m\bar{a} = m\vec{r}'' = f(\rho)\dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\rho = \|\vec{r}\|$. (Χώρος φάσης 6 διαστάσεις)



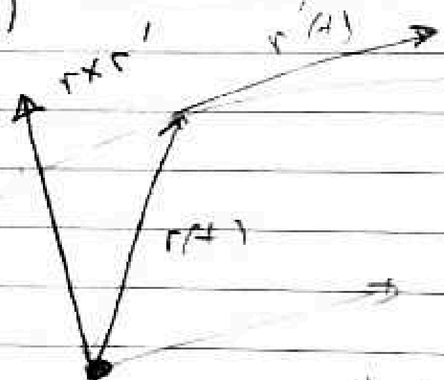
r αντί $\vec{r}$

Διατήρηση Στροφορμής (Κεπλέριο)

$$\frac{d}{dt}(r \times r') = \cancel{r' \times r'} + r \times r''$$

(m r v) Στροφορμή

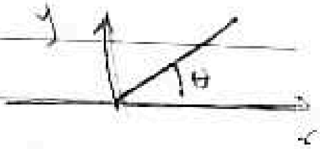
$$= r \times \left(f(\rho)\frac{r}{\|r\|} \right) = 0.$$



(2) $r \times r' = \vec{M}$ = σταθερό διάνυσμα

$\Rightarrow$ Κίνηση στο ίδιο επίπεδο.

2. Κίνηση στο Επίπεδο



(3) $r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{bmatrix}$, $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$

(4) $r''(t) = \begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\rho'' - \rho(\theta')^2)\cos\theta - (2\rho'\theta' + \rho\theta'')\sin\theta \\ (\rho'' - \rho(\theta')^2)\sin\theta + (2\rho'\theta' + \rho\theta'')\cos\theta \end{bmatrix}$

$$\| \qquad = (\rho'' - \rho(\theta')^2)\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + (2\rho'\theta' + \rho\theta'')\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$f(\rho)\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

Χρηση $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$(5)\quad \begin{cases} \rho'' - \rho(\theta')^2 = f(\rho) \\ \rho\theta'' + 2\rho'\theta' = 0 \end{cases}$$

Διατηρηση Στροφορμης (Μετρο)

$$(\rho^2\theta')' = 2\rho\rho'\theta' + \rho^2\theta'' \overset{(5)_{(ii)}}{=} 0$$

$$|\vec{M}|^2 = |r \times r'| = \left| \rho \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \times \left[\rho' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \theta' \right] \right|$$

$$= |\rho^2\theta'| = \text{σταθερα} =: M$$

$$(6)\quad \theta' = \frac{M}{\rho^2}$$

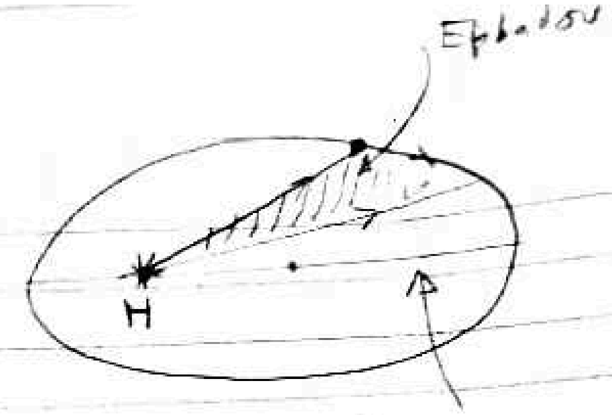
$(5),(6) \Rightarrow$

$$(7)\quad \begin{cases} \rho'' - \dfrac{M^2}{\rho^3} = f(\rho) \\ \theta' = \dfrac{M}{\rho^2} \end{cases}$$

Νευτωνια Επαγωγη των Νομων Kepler (1571-1630)
(Newton: 1642-1727)

Νομοι Kepler (14 χρονια παρατηρηση του Αρη)

1. Οι πλανητες κινουνται σε ελλειπτικες τροχιες με μια των εστιων τον ηλιο



2. Η επιβατική ακτίνα με αρχή τον ήλιο και πέρας τον πλανήτη καλύπτει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους

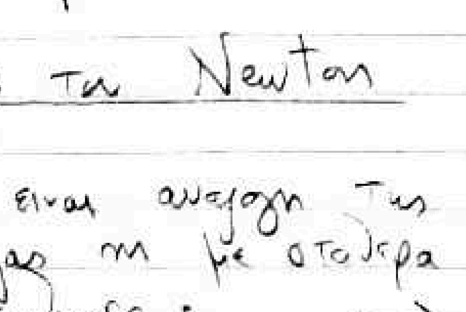
3. Η περίοδος της περιστροφής γύρω από τον ήλιο είναι ανάλογη του κύριου ημιάξονα της έλλειψης στην δύναμη $\frac{3}{2}$

Σημ: Εντυπωσιακές Παρατηρήσεις δεδομένης της ανυπαρξίας οργάνων, χωρίς Αναλυτική Γεωμετρία ακόμη (Κωνικές Τομές γνωστές από Αλεξανδρινή εποχή).

Οι νόμοι του Kepler είχαν καθιερωθεί στην επιστημονική κοινότητα πριν τον Νεύτωνα.

Αξίωμα του Newton. (Νόμος Παγκόσμιας Έλξης)

Μάζες m_1, m_2 σε θέσεις $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ έλκονται δύναμη μέτρου



σταθερά

$$|\vec{F}| = G\frac{m_1 m_2}{\rho^2} \quad (1)$$

$$\rho = \|\bar{X}_1 - \bar{X}_1\|$$

2ος Νόμος του Newton

Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της δύναμης που ασκείται στο σώμα μάζας m με σταθερά αναλογίας την $1/m$ στην ίδια κατεύθυνση:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}. \quad (2)$$

1, 2 $\Rightarrow$

(3)
$$\begin{cases} X_1'' = \dfrac{Gm_2(\bar{X}_2-\bar{X}_1)}{\|\bar{X}_2-\bar{X}_1\|^3} \\ \\ X_2'' = \dfrac{Gm_1(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{\|\bar{X}_1-\bar{X}_2\|} \end{cases}$$

Χωρος Φασης = $\mathbb{R}^{12}$ $\left(\begin{array}{ll} X=(x,y,z) & 2\times 3 \\ X'=(x',y',z') & 2\times 3 \end{array} \right)$

|| Υποβιβασμος Διαστασεως Μεσω Νομων Διατηρησης.

(I) Κεντρο Μαζας :

(4) $$\bar{X} = \frac{m_1\bar{X}_1 + m_2\bar{X}_2}{m_1+m_2}$$ (ρωτες)

Παρατηρηση (Διατηρηση της Ορμης).

(5) $\bar{X}'' = 0$

Προκυπτει αμεσα απο (3)

(5) $\rightarrow$ Κεντρο Μαζας Κινειται Με

|| σταθερη Ταχυτητα Ευθ-γραμμα

(6) $\bar{X} = \bar{a} + t\,\bar{b}$

Θα περιγράψουμε την κίνηση των μαζών m_1, m_2 ως προς το κέντρο μάζας.
Εισάγουμε

(7) $$\bar{r} := \bar{r}_1 := X_1 - X \quad , \quad \bar{r}_2 := X_2 - X.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

(8) $$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$$

Επίσης

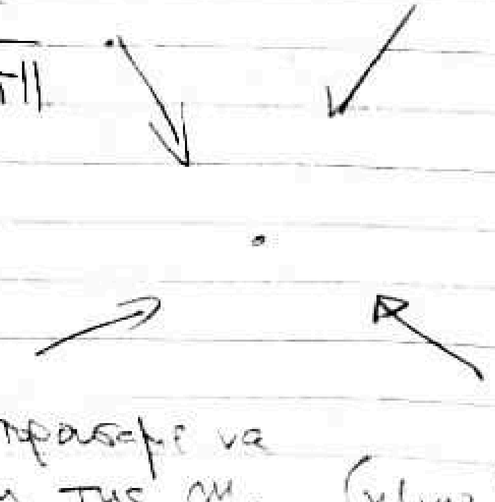
(9) $$r_1'' = \frac{G m_2}{\|r_1 - r_2\|^3} (r_2 - r_1)$$

Αντικαθιστώντας από την (8) το r_2:

$\Rightarrow$

(10) $$r_1'' := r'' = -\frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2)} \frac{r}{\|r\|^3}$$

Χώρος Φάσης $\mathbb{R}^6$ $$=: -K \frac{1}{\|r\|^2} \frac{r}{\|r\|}.$$



Κεντρική Δύναμη !!

<u>Παρατήρηση</u>

Αν η $m_2 >> m_1$ τότε θα μπορούσαμε να πάρουμε ως κέντρο μάζας την θέση της m_2 (ήλιο) (βλ (4) $\bar{X} \simeq \bar{X}_2$). Δεν χρειάζεται όμως αυτή η προσέγγιση.

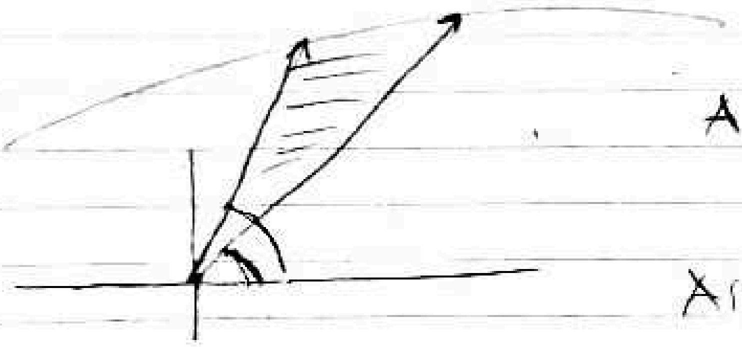
Διατήρηση της (κατεύθυνσης) Στροφορμής $\Rightarrow$ Κίνηση στο $\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$

Χώρος Φάσης $\mathbb{R}^4$.

Διατήρηση του Μέτρου της Στροφορμής

(11) $$\rho^2\theta' \equiv M \qquad , \ \rho=\|r\|$$



$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\,d\theta$$

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} r^2(\theta)\,d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = r^2\theta' \equiv M$$

Εμβαδόν $A(t)$ ανάλογο του Χρόνου (2ος νόμος Kepler)

Σύστημα (7)

(12) $$\begin{cases} \rho'' - \dfrac{M^2}{\rho^3} = f(\rho) & , \ \rho = \|r\| \\ \theta' = \dfrac{M}{\rho^2} & , \end{cases}$$

(13) , $$m\vec{r}'' = f(\rho)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \overset{(10)}{=} -\frac{K}{\|\vec{r}\|^2}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

(12), (13) $\Rightarrow$

$$(14)\quad \rho'' = -\frac{K}{\rho^2} + \frac{M^2}{\rho^3} = -\frac{dW(\rho)}{d\rho}$$ (Χωρος φασης $\mathbb{R}^2$)

Δυναμικο $$W = -\frac{K}{\rho} + \frac{M^2}{2\rho^2}$$

$\therefore$

$$(14) \Leftrightarrow \quad \rho'' = -\frac{dW}{d\rho}.$$

Μετατροπη σε συστημα $1^{ης}$ ταξης:

$$(15)\quad \begin{cases} \rho' = \upsilon \\ \upsilon' = -\dfrac{K}{\rho^2} + \dfrac{M^2}{\rho^3} \end{cases}$$ (Χωρος φασης $\mathbb{R}^2$)

|| Διατηρηση Μηχανικης Ενεργειας (Χαμιλτονιανα 1.9.2 Αλικακος - Καλογεροπουλος)

$$(16)\quad E(\rho,\upsilon) := \frac{1}{2}\upsilon^2 + W(\rho) = \frac{1}{2}\upsilon^2 - \frac{K}{\rho} + \frac{M^2}{2\rho^2}$$

$$(17)\quad \frac{d}{dt}E(\rho,\upsilon) = \upsilon\upsilon' + \frac{dW}{d\rho}\rho' = \rho'\left(-\frac{dW}{d\rho}\right) + \frac{dW}{d\rho}\rho' = 0$$

$\Rightarrow$

$$E(\rho, \theta) = \text{σταθερα} = C$$

(18) $$\frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 - \frac{K}{\rho} + \frac{M^2}{2\rho^2} = C =: \mathcal{E}$$

(Χωρος Φασης $\mathbb{R}$!)

$\Rightarrow$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{2\left(\mathcal{E} + \frac{K}{\rho} - \frac{M^2}{2\rho^2}\right)}$$

(ατοχρονου χρονου)

(19) $$\boxed{\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{d\theta/dt}{d\rho/dt} = \frac{M}{\rho^2\sqrt{\mathcal{E} + \frac{K}{\rho} - \frac{M^2}{2\rho^2}}}}$$

Ασκηση 1

Ασκηση 6.7 #6b Hubbard-West

(20) $$\boxed{\theta = \underset{0}{\text{Τοξεφ}}\, \frac{\left(M/\rho - \frac{K}{M}\right)}{\sqrt{2\mathcal{E} + K^2/M^2}}}$$

Άσκηση 2

Θέτουμε $M^2/K =: p$ και

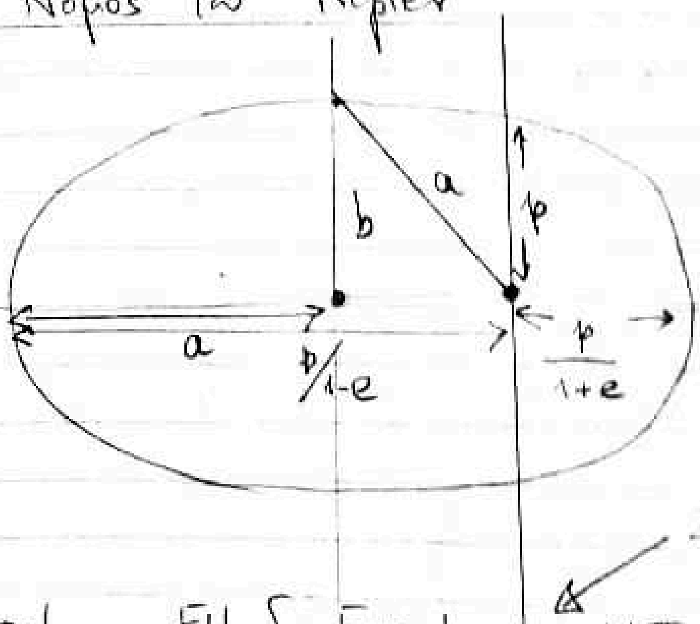
$$\sqrt{1+(2EM^2/K^2)} =: e$$

δείξτε ότι η (20) παίρνει την μορφή

(21) $$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

$e =$ εκκεντρικότητα

3ος Νόμος του Kepler



2ος Νόμος

$2\pi ab$ = Εμβαδό Έλλειψης $= MT$

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \quad T = 2\pi a \frac{b}{M} = 2\pi a^{3/2}\frac{\sqrt{p}}{M} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{K}}$$