Lotka Volterra

$$\begin{cases} x' = (\alpha - \beta y)x \\ y' = (\delta x - \gamma)y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\delta x - \gamma)y}{(\alpha - \beta y)x} \Leftrightarrow -(\delta x - \gamma)y\,dx + (\alpha - \beta y)x\,dy = 0$$

Διαιρούμε με xy (ολοκληρωτικός παράγων)

$$-\frac{1}{xy}(\delta x - \gamma)y\,dx + \frac{1}{xy}(\alpha - \beta y)x\,dy = 0$$

$$-(\delta - \frac{\gamma}{x})dx + (-\beta + \frac{\alpha}{y})dy = 0 \qquad \text{Ακριβής}$$

$$F_x\,dx + F_y\,dy$$

$$F(x,y) = -\delta x + \gamma \ln x + h(y)$$

$$\therefore \quad F(x,y) = \underbrace{-\delta x + \gamma \ln x}_{g_1(x)} \underbrace{-\beta y + \alpha \ln y}_{g_2(y)}$$

Γενική Λύση: $F(x,y) = c$

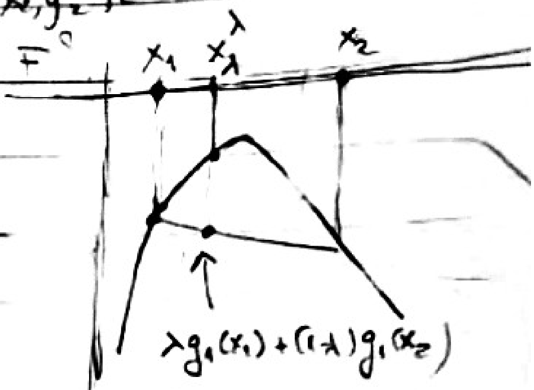
(καμπύλες στάθμης)

$$F_c = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ F(x,y) = c\},$$

$$F^c = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ F(x,y) \geq c\}$$

1) • F^C είναι κυρτό σύνολο: $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)\in F^C$

$\Rightarrow \lambda z_1+(1-\lambda)z_2\in F^C$

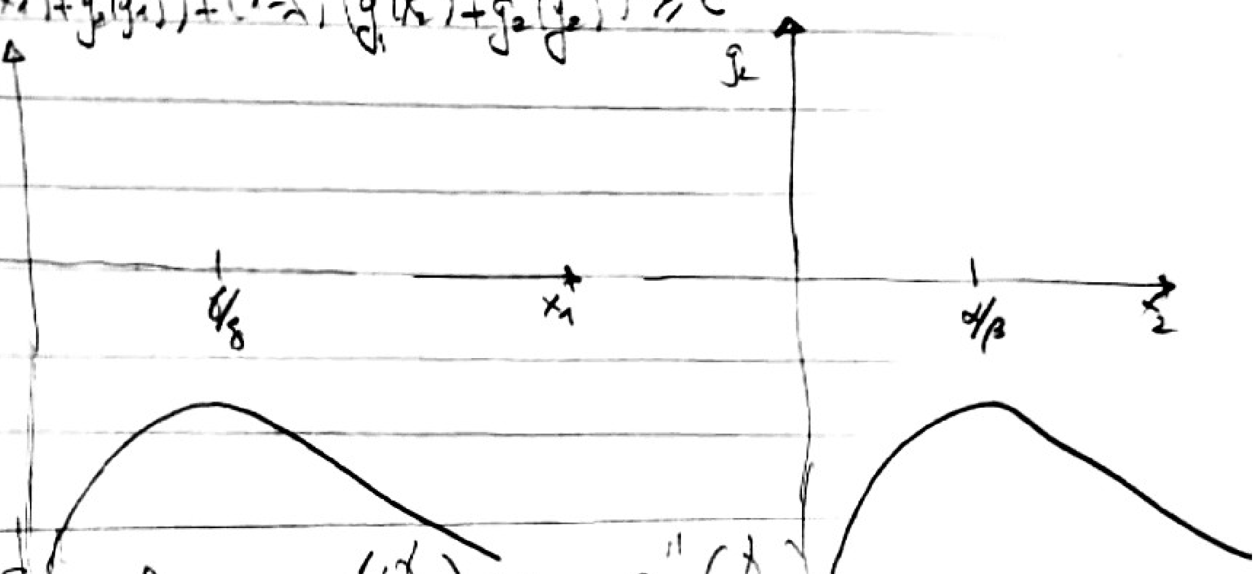


$g_1(x_1)+g_2(y_1)\geq c$, $g_1(x_2)+g_2(y_2)\geq c$

$g_1(\underbrace{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}_{x_\lambda})+g_2(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$

$\geq[\lambda g_1(x_1)+(1-\lambda)g_1(x_2)]+[\lambda g_2(y_1)+(1-\lambda)g_2(y_2)]$

$=\lambda(g_1(x_1)+g_2(y_1))+(1-\lambda)(g_1(x_2)+g_2(y_2))\geq c$



$g_1(x)=-\delta x_1+\gamma\ln x_1$, $g_1'\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)=0$, $g_1''\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)<0$

$g_1''(x_1)=-\frac{\gamma}{x_1^2}<0 \Rightarrow g_1$ κοίλη

2) • Να δείξετε ότι το F^C είναι συμπαγές.

Με τη άτοπον απαγωγή: Έστω $(x_n,y_n)\in F^C$, $\sqrt{x_n^2+y_n^2}\to\infty$

Έστω $|x_n|\to\infty$ (χ.β.γ.)

$g_1(x_n)+g_2(y_n)\geq C \Rightarrow g_1(x_n)\geq C-g_2(y_n)\geq C$

$-\delta x_n+\gamma\ln x_n\geq C \Leftrightarrow \gamma\ln x_n\geq\delta x_n \Leftrightarrow \frac{\ln x_n}{x_n}\geq\frac{\delta}{\gamma}$

$\frac{\ln x}{x} \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$ $\otimes$. άτοπο!

3) • $F^{c_1} \subseteq F^{c_2}$ $\quad c_1 > c_2$

$(x_1, y_1) \in F^{c_1} \Leftrightarrow g_1(x_1) + g_2(y_1) \geq c_1 \geq c_2$ ✓

• $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ ολικό μέγιστο

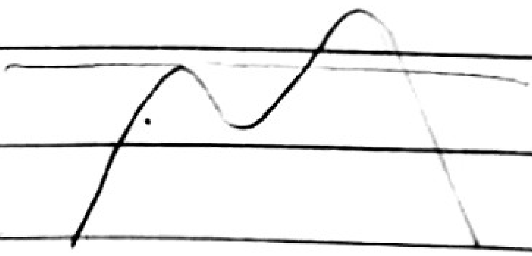
✓

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) = g_1'\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) = g_2'\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1''\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) & 0 \\ 0 & g_2''\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \end{pmatrix}$$ αρνητικά ορισμένος

$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ μέγιστο.

Μια κοίλη συνάρτηση έχει μοναδικό τοπικό μέγιστο



διότι βρίσκεται από την ίδια μεριά κάθε εφαπτόμενου επιπέδου.

• $F^c \cap \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$, $F^c \cap \{(0,y), y \in \mathbb{R}\} = \emptyset$

□