(B7)

B. <u>Θεώρημα 10.14</u> (Αρχή του LaSalle)

Έστω $V \in C^1(U;\mathbb{R})$, U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
Ορίζουμε

(10.133) $$\dot V(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(\varphi(t,x)), \quad x \in U,$$

και υποθέτουμε ότι

(10.134) $$\dot V(x) \le 0, \quad x \in U$$

Ορίζουμε επίσης

$$E := \{x \in C \mid \dot V(x) = 0\}$$

όπου C συμπαγές υποσύνολο του U, και υποθέτουμε ότι

$$\gamma^+(x_0) \subset C.$$

Θεωρούμε το <u>Μέγιστο Αναλλοίωτο</u> υποσύνολο του E, που λέγαμε <u>M</u>
δηλαδή $\varphi(t, M) \subset M$, $\forall t \in \mathbb{R}$
Τότε ισχύει ότι

(10.135) $$\omega(x_0) \subset M$$

και συνεπώς

(10.136) $$d(\varphi(t,x_0), M) \to 0 \quad \text{όπως } t \to \infty$$

Επίσης η V είναι σταθερά στο $\omega(x_0)$.

Σημειώσεις

(α) Ο ορισμός της $\dot{V}$ στην (10.133) συμπίπτει με τον Ορισμό 10.13, στην περίπτωση που το Δ.Σ. φ γίνεται από το

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t) := \varphi(t, x_0)$.

Πράγματι

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t,x_0)) = \nabla V(\varphi(t,x_0)) \cdot x'(t)$$
$$= \nabla V(\varphi(t,x_0)) \cdot f(\varphi(t,x_0)).$$

Κατά συνέπεια

$$\dot{V}(x_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(\varphi(t,x_0)) = \nabla V(x_0) \cdot f(x_0)$$

(β) Η υπόθεση (10.134) συνεπάγεται, όπως και στην περίπτωση του Ορισμού 10.13, ότι

(10.137) $$\frac{d}{dt} V(\varphi(t,x)) \leq 0.$$

Από το ορισμό της παραγώγου

(10.138) $$\frac{d}{dt} V(\varphi(t,x)) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} V(\varphi(t+\tau,x))$$

και μέσω της ιδιότητας της ομάδος

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{\tau=0} V(\varphi(\tau, \varphi(t,x))$$

$$\underset{(10.134)}{=} \dot{V}(\varphi(t,x)) \leq 0 .$$

Κατά συνέπεια η $t \to V(\varphi(t,x_0))$ είναι φθίνουσα.

$\square$

Απόδειξη Θεωρήματος 10.14

$\gamma^+(x_0) \subset G$, επομένως το $\overline{\gamma^+(x_0)}$ είναι συμπαγές. Η μονοτονία της

$$t \to V(\varphi(t,x_0))$$

συνεπάγεται την ύπαρξη του ορίου

(10.139) $$\lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t,x_0)) = L$$

Προφανώς

(10.140) $$L = \inf \{V(x) \mid x \in \overline{\gamma^+(x_0)}\}$$

$$= \min \{V(x) \mid x \in \overline{\gamma^+(x_0)}\} \in (-\infty, \infty)$$

λόγω συμπάγειας του $\overline{\gamma^+(x_0)}$.

Επίσης αν $y \in \omega(x_0)$, τότε για κάποια αύξουσα ακολουθία $\{t_n\} \to +\infty$, $\varphi(t_n, x_0) \to y$, B19

$$V(y) = V\left(\lim_{t_n \to +\infty} \varphi(t_n, x_0)\right)$$
$$= \lim_{t_n \to +\infty} V(\varphi(t_n, x_0)) \quad (V(\cdot) \text{ συνεχής})$$
$$= L \quad ((10.139))$$

Εφόσον το $\omega(x_0)$ είναι αναλλοίωτο, έπεται ότι
$$V(\varphi(t,y)) = L \quad , \forall t,$$
και κατά συνέπεια
$$\dot{V}(y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} V(\varphi(t,y)) = 0 .$$

Προκύπτει ότι $\omega(x_0) \subset M$.

Η απόδειξη του θεωρήματος 10.14 είναι πλήρης.

$\square$

<u>Παράδειγμα</u>

Να δειχθεί ότι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για την εξίσωση
$$x'' + (x')^3 + g(x) = 0$$
όταν
$$g(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}$$

<u>Λύση</u>

Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ δίνεται από την σχέση

$U'(x) = g(x)$, ολοκληρώνοντας (από το 0) προκύπτει

$$U(x) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi = 2\left(\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - 1\right).$$

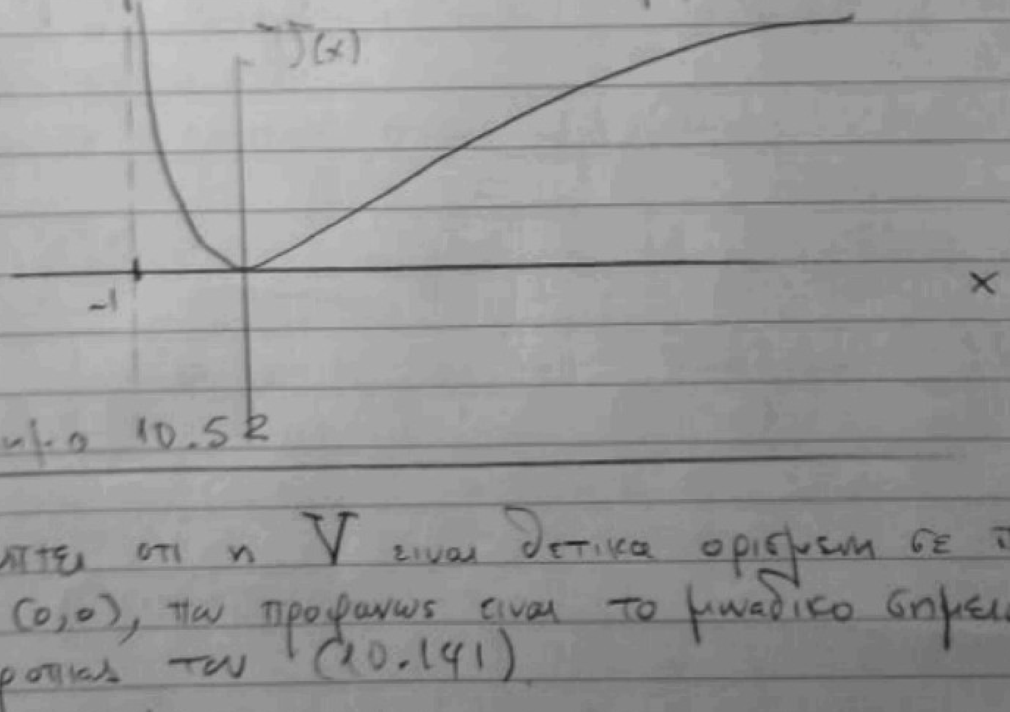
Ορίζουμε ως $V(x_1,x_2)$ την μηχανική ενέργεια,

$$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1),$$

$$(10.141)\quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -g(x_1) - x_2^3 \end{cases}$$

Στο Σχήμα 10.52 έχουμε το γράφημα της $U(x)$

Γράφημα



Σχήμα 10.52

Προκύπτει ότι η V είναι θετικά ορισμένη σε περιοχή του $(0,0)$, που προφανώς είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του (10.141).
Επίσης έχουμε ότι

$$(10.142)\quad \dot V(x_1,x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(-g(x_1) - x_2^3\right)$$
$$= g(x_1)x_2 + x_2\left(-g(x_1) - x_2^3\right)$$
$$= -x_2^4 \le 0.$$

[illegible] [illegible] το Θεώρημα 10.11 [illegible] [illegible] [illegible] και [illegible] την [illegible] [illegible].

Για την [illegible] [illegible] δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 10.11 διότι γ^+ δεν είναι αναγκαστικά φραγμένη. Θα χρησιμοποιήσουμε την [illegible] [illegible], Θεώρημα 10.14, προς αυτή την κατεύθυνση.

Θεωρούμε για λύση $(x_1(t), x_2(t))$ με [illegible]

$$(x_1(0), x_2(0)) \in \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < \delta^2\}$$

έτσι ώστε [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

(10.143) $$(x_1(t), x_2(t)) \in \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon^2\} =: C$$

Επιλέγουμε αυθαίρετα $0<\varepsilon<1$.

Η τροχιά [illegible] είναι φραγμένη,

(10.144) $$\gamma^+(x_1(0), x_2(0)) \subset C$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα 10.14 με

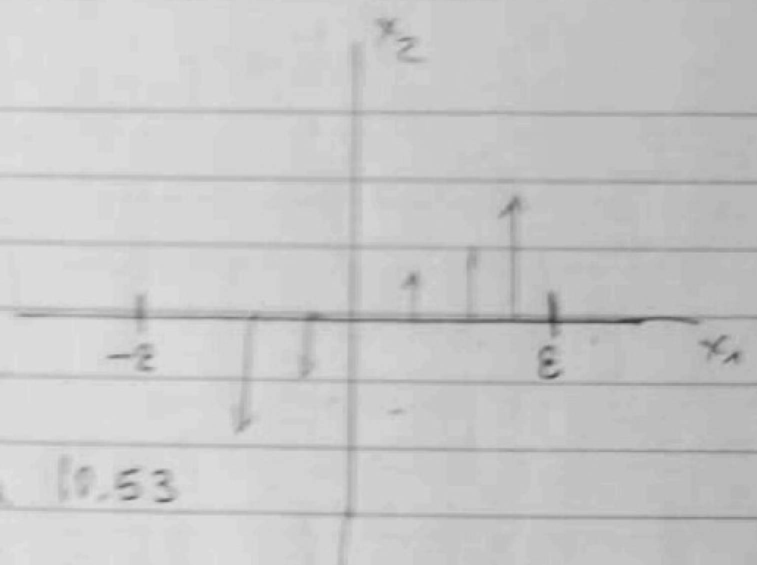
$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Από την (10.142) προκύπτει ότι

(10.145) $$E \subset \{x_1\text{-άξονας}\}$$

Θα δείξουμε ότι

(10.146) $$M = \{(0,0)\}$$



Σχήμα 10.53

Στο Σχήμα 10.53 έχουμε σχεδιάσει το διανυσματικό πεδίο της (10.1[illegible]). Εξετάζουμε ότι το M δεν μπορεί να περιέχει σημεία του x_1-άξονα εκτός του $(0,0)$, διότι η ροή αμέσως εξέρχεται από τον x_1-άξονα, κάτι που αντιβαίνει την (10.145). Αναγκαστικά λοιπόν

$$\omega(x_1(0), x_2(0)) \subset \{(0,0)\}.$$

Επίσης από την (10.144) συμπεραίνουμε ότι

$$\omega(x_1(0), x_2(0)) \neq \emptyset.$$

Συνεπώς

$$\omega(x_1(0), x_2(0)) = \{(0,0)\}.$$

Έπεται ότι $\lim_{t\to\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0,0)$.

Η απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας είναι πλήρης.

$\square$