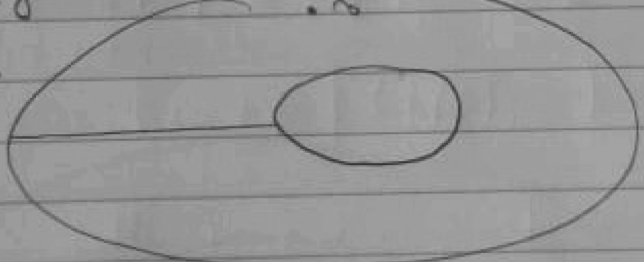
Το Σχ 3(α) αποτελείται λόγω διατομής :
Το Σχ 3(β) —"— ——— μοναδικότητος (αντιστρέφουμε τον χρόνο).

(b) • $\sigma \in J$ ευρίσκεται σε κλειστή τροχιά γ αν και μόνο αν $F(\sigma)=\sigma$

Έστω $\sigma \in \gamma$. Γνωρίζουμε από την Αν2 ότι η γ μπορεί να τέμνει την διατομή J το πολύ σε ένα σημείο. Αναγκαστικά λοιπόν την τέμνει μόνο στο σ. Έπεται ότι $F(\sigma)=\sigma$

Αντίστροφα αν $F(\sigma)=\sigma \Leftrightarrow \phi(\tau(\sigma),\sigma) = \sigma = \phi(0,\sigma)$, και $\tau(\sigma)\neq 0 \Longrightarrow t \to \phi(t,\sigma)$ περιοδική.

(c) Έστω $\omega(x_0)$ οριακό σύνολο, $\omega(x_0) \subset W$.
• $\omega(x_0)=\gamma$ $\quad .x_0$
γ περιοδική.



διατομή

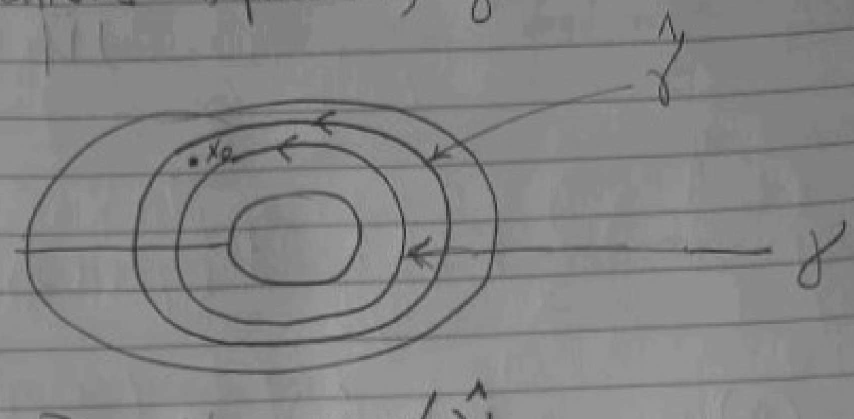
Γνωρίζουμε ότι αν $y \in \omega(x_0) \Longrightarrow$ η τροχιά της y τέμνει το πολύ σε ένα σημείο (Πρόταση 7 σ. 128). Εξ' υποθέσεως $\exists\ t>0$ τ.ω. $\phi(t,y)\in J$ και επίσης $s<0$ τ.ω. $\phi(s,y)\in J$

Έπεται ότι $\phi(s,y)=\phi(t,y)$, $s\neq t$
$\Longrightarrow$ η τροχιά γ της y περιοδική. Έχουμε $\gamma \subset \omega(x_0)$.
(από αναλλοίωτο του $\omega(x_0)$)

Αν $x_0 \in \gamma$ τότε $\omega(x_0)=\gamma$.

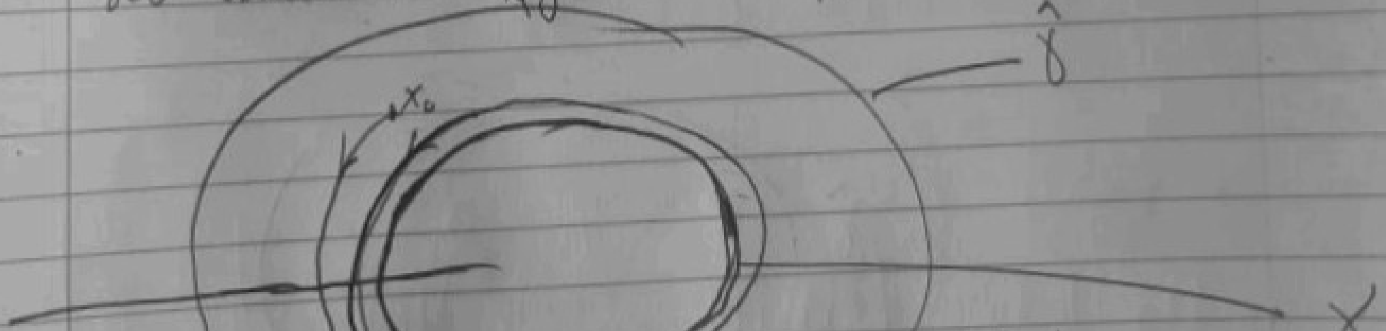
Έστω $x_0 \notin \gamma$, και έστω $\gamma \subsetneq \omega(x_0)$. Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Θα υποδείξουμε ότι το x_0 δεν ανήκει σε κάποια περιοδική τροχιά.

Επιλέγουμε $\xi \in \omega(x_0)/\gamma$. Από το προηγούμενο επιχείρημα για το y προκύπτει ότι η τροχιά του ξ είναι επίσης περιοδική, $\hat{\gamma}$



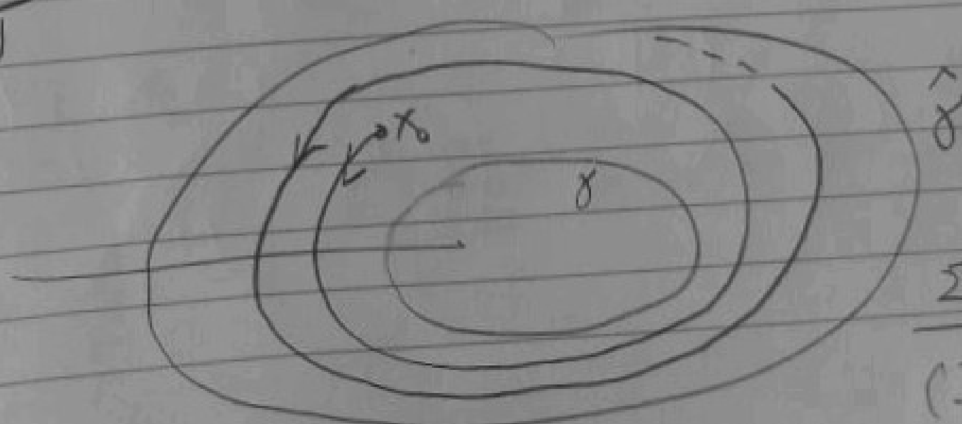
Εξ' υποθέσεως $x_0 \notin \hat{\gamma}$.

Θεωρούμε την τροχιά του x_0. Γνωρίζουμε ότι $\exists\, \tau(x_0)$ τ.ω. $\phi(\tau(x_0), x_0) \in J$. Εφόσον το x_0 δεν ανήκει σε περιοδική τροχιά έχουμε τις εξής δύο δυνατότητες λόγω του Λήμματος της μονοτονίας:



<u>ΣχΑ</u>: $\hat{\gamma} \not\subset \omega(x_0)$ (Jordan)

β) ΣχΓ σ. 149



<u>ΣχΒ</u>: $\gamma \subset \omega(x_0)$ (Jordan) □

Σημ.

Η υπόθεση της ολικής διατομής, δηλ. ότι

$\forall\ x \in W\ \exists\ t>0$ τ.ω. $\phi(t,x) \in J$, και

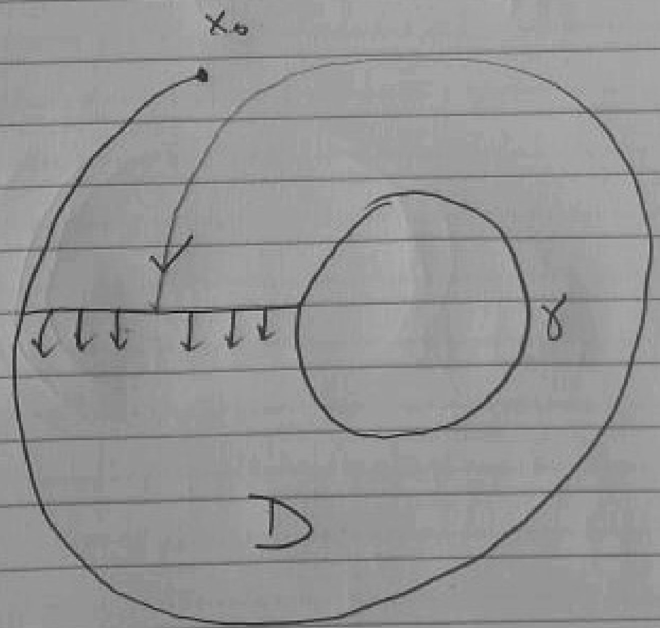
$s<0$ τ.ω. $\phi(s,x) \in J$, απλοποιεί την

απόδειξη του Poincaré - Bendixson στο

ότι δεν χρειάζεται

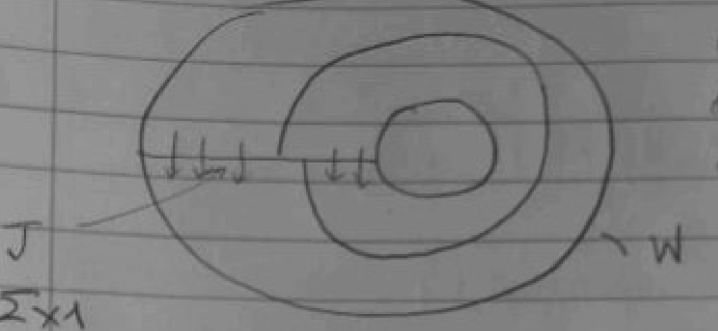
(i) θεώρημα συνεχούς εξάρτησης

(ii) Λήμμα Fibration.



Σχ Γ : D ανάγλυπτο

Άσ 3, [HS, σ247]



Σχ1

Υποθέσεις

(0) J τοπική διατομή

(i) W δεν περιέχει ΣΙ

(ii) Δοθέντος $x \in W$ $\exists\, t(x)>0$ και $s(x)<0$ τ.ω. $\phi(t(x),x) \in J$, $\phi(s(x),x) \in J$

(a) Δοθέντος $x \in J \overset{(0)}{\Longrightarrow} \phi_t(0,x) = f(x) \neq 0$. $\exists\, \varepsilon>0$ τ.ω.

$\Rightarrow \phi_t(x) \notin J$ για $0<t\leq\varepsilon$.

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \exists\, t^*>0$ τ.ω. $\phi(t^*, \phi_\varepsilon(x)) \in J$

$\Leftrightarrow \phi(\varepsilon+t^*, x) \in J$.

Θεωρούμε το ελάχιστο $t^* \geq 0$ με αυτήν την ιδιότητα: t^*_m. Προφανώς $t^*_m = t^*_m(x) \geq 0$.

Ορίζουμε $\tau(x) := \varepsilon + t^*_m(x) > 0$.

Ορίζουμε επίσης

$$F(\sigma) = \phi(\tau(\sigma), \sigma), \quad \sigma \in J$$

Εξ' ορισμού

$$F : J \to J, \quad J = \text{διάστημα}, \ J=(\alpha,\beta)$$

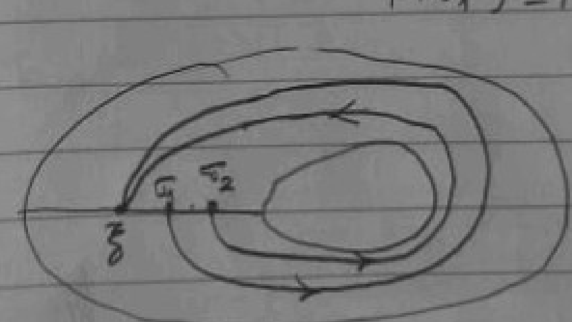
• F είναι C^1

Προκύπτει από την Πρόταση σ.145.

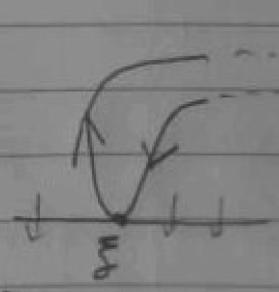
• F είναι 1-1

Με άτοπο. Έστω

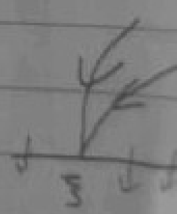
(1) $$F(\sigma_1) = F(\sigma_2) =: \xi$$



Σχ2



Σχ3(α)



Σχ3(β)