Νέα 121

Β. Το Γενικό Θεώρημα Poincaré – Bendixson (Προσπαθησε)

Θεώρημα 3 (Η γνωστή εκδοση)
Εστω $u(t)$ λυση της

(1) $$x' = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \quad , \quad f(x) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$$

$$f \in C^1(\hat{U}; \mathbb{R}^2) \quad , \quad f : \mathbb{R}^2 \supset \hat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2 .$$

Υποθεταμε οτι η $x(t)$ οριζεται για $t \geq 0$, $x(t) \in V \subset\subset \hat{U}$.

(13) $$\omega(x_0) \cap \{ x \mid f(x) = 0 \} = \emptyset$$

Τοτε $\omega(x_0) =$ Περιοδικη Τροχια

□

Σημ

Το Θεωρημα 2 λογω της (5), και τω οτι ο "δακτυλος" ειναι θετικα αναλλοιωτος, ικανοποιει την (13) $\forall$ λυση της (1). Κατα συνεπεια το $\omega(x_0) =$ οριακος κυκλος $=$ περιοδικη λυση, $\forall\ x_0 \in \hat{U}$.

□

Υπαρχει και εξαιρετως ισχυροτερη εκδοση του θεωρηματος

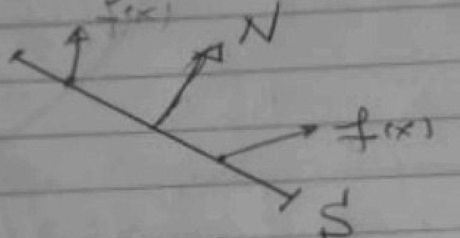
Θεωρημα 4
Εστω $\varphi(t, x_0)$, λ-ση της (1), οριζεται και φραγμενη για $t>0$ Τοτε ή $\omega(x_0) =$ οριακος κυκλος $=$ περιοδικη τροχια, ή $\forall\ y \in \omega(x_0)$ ισχυει οτι $f\big|_{\alpha(y)} = f\big|_{\omega(y)} = 0$

122

1. Τοπικές Διατομές

Ορισμός

Ένα ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $S \subset \hat{U}$ λέγεται Τοπική Διατομή αν το Δ.Σ. πεδίο f δεν είναι πουθενά εφαπτόμενο στο S.

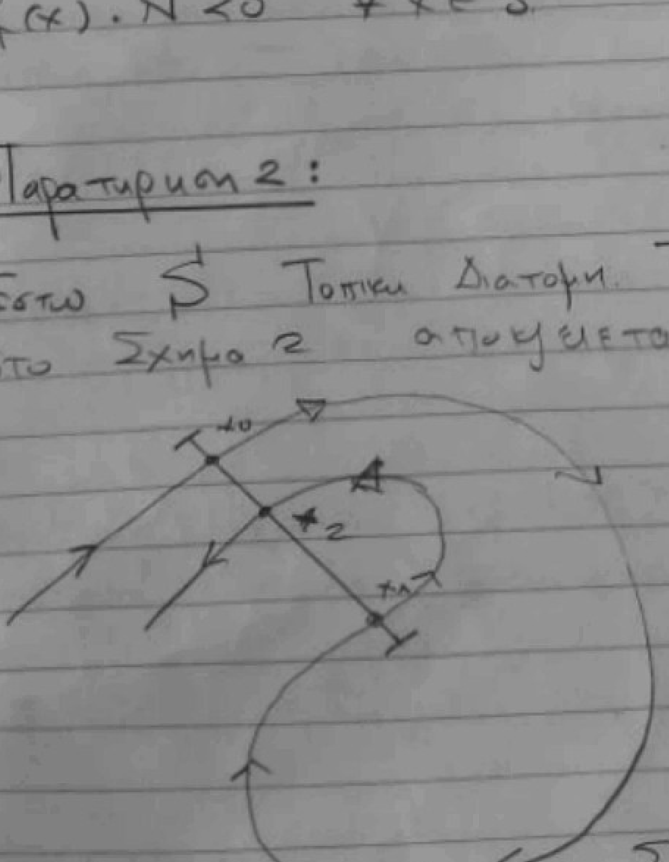


Σχήμα 1

Παρατήρηση 1: Λόγω συνέχειας το πεδίο f θα βλέπει είτε δεξιά, είτε αριστερά. Δηλαδή αν $N \perp S$, φιξαρισμένο, τότε είτε $f(x) \cdot N > 0 \ \forall x \in S$, είτε $f(x) \cdot N < 0 \ \forall x \in S$.

Παρατήρηση 2:

Έστω S Τοπική Διατομή. Το παρακάτω σενάριο στο Σχήμα 2 αποκλείεται διότι απαραίτητα στο x_0 $f(x_0) \cdot N > 0$ ενώ $f(x_2) \cdot N < 0$.



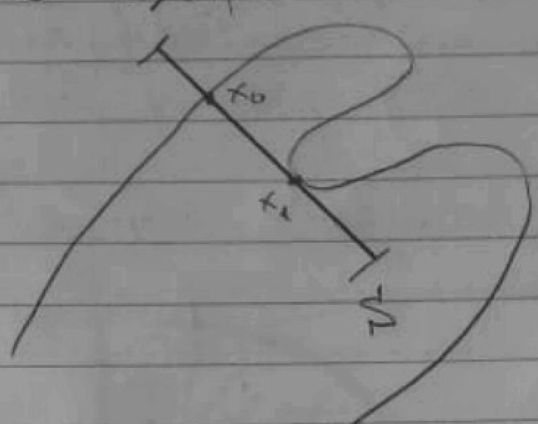
Σχήμα 2

123

Παρατηρηση 3:

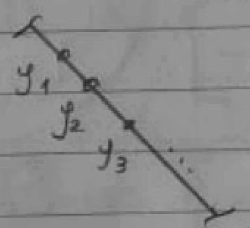
Εστω S Τοπικη Διατομη. Το παρακατω σεναριο στο Σχημα 3 επισης αποκλειεται λογω

$$f(x_1)\cdot N = 0.$$



Ορισμος (Μονοτονες Ακολουθιες Σημειων)

Εστω I ενα ευθυγραμμο τμημα στο $\mathbb{R}^2$.



Μια ακολουθια σημειων $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ειναι Μονοτονη στο I αν

$$y_n - y_0 = \lambda_n (y_1 - y_0), \quad 1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots <$$

Σημειωση: $\{y_n\}$ μονοτονη $\Longleftrightarrow$ y_n μεταξυ y_{n-1} και y_{n+1} στην φυσιολογικη διαταξη στο I.

Ορισμος

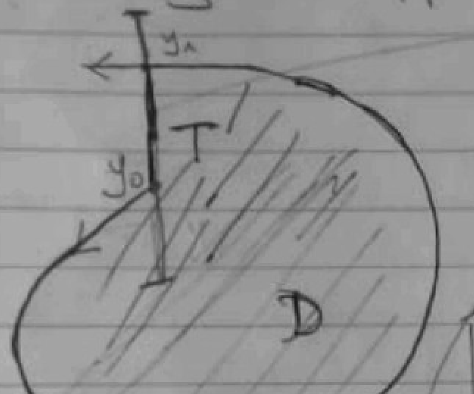
Δοθεισης λυσης $\varphi(t, x_0)$, καμπυλη $\{x_n = \varphi(t_n, x_0)\}$ μονοτονη ακολουθια κατα μηκος της τροχιας αν

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n \ldots$$

2. <u>Λημμα 5</u> (Λημμα Μονοτονιας – Κλειδι)

Εστω S' Τυπικη Διατομη και y_0, y_1, y_2 σημεια στην S' επι της ιδιας τροχιας $\varphi(t, x_0)$. Αν y_0, y_1, y_2 ειναι μονοτονη ακολουθια κατα μηκος της τροχιας, τοτε ειναι μονοτονη στην S'.

<u>Αποδειξη Λημματος 5</u>



S' = διατομη

ανοικτο

οχι αυτοτομες

$\Sigma = B \cup T \cup \{y_0, y_1\} = \partial D$

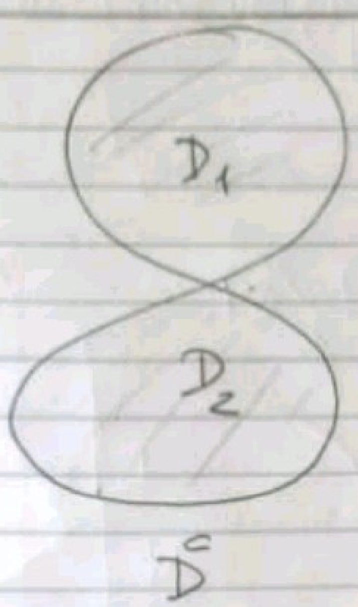
Απο Jordan $\Rightarrow$ το ∂D χωριζει το $\mathbb{R}^2$ σε δυο ανεκτικα συνολα: D φραγμενο, και $\mathbb{R}^2 \setminus D$ μη φραγμ.

$$B = \{ \varphi(t, x_0) \mid t_0 < t < t_1, \ \varphi(t_0, x_0) = y_0, \ \varphi(t_1, x_0) = y_1 \}$$

Εστω Σ η <u>απλη</u> κλειστη καμπυλη που αποτελειται απο το τμημα B της τροχιας μεταξυ των y_0 και y_1, και το ευθυγραμμο τμημα $T \subset S'$ μεταξυ y_0 και y_1.
Εστω D η φραγμενη κλειστη περιοχη, $\partial D = \Sigma$.
Υποθετουμε οτι η λυση εξερχεται της D στο y_1 (λογω Jordan $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D = D \cup D^c$, ανοικτα, ανεκτικα και επεται οτι οταν διασχιζεις το ∂D αλλαζεις <u>συνιστωσα</u>, βλ. 125).
Θα δειξουμε οτι σε καθε σημειο του T η αντιστοιχη λυση εξερχεται απο το D.
Πρωτον το T δεν εφαπτεται στη τροχια διοτι ειναι διατομη. Σε καθε σημειο του T η αντιστοιχη τροχια για αυθαιρετο $\varepsilon > 0$, t χρονος τομης με T, στο $t+\varepsilon$ ευρισκεται ή στο D^c ή στο D. Στο Σχημα στην σελιδα 124 βλεπουμε οτι αυτο δεν ισχυει για μη απλες καμπυλες.

125

Λόγω συνέχειας ως προς τις αρχικές συνθήκες το υποσύνολο T_- του T όπου η λύση εξέρχεται από το D είναι ανοικτό, και $\neq \emptyset$ λόγω του y_1.

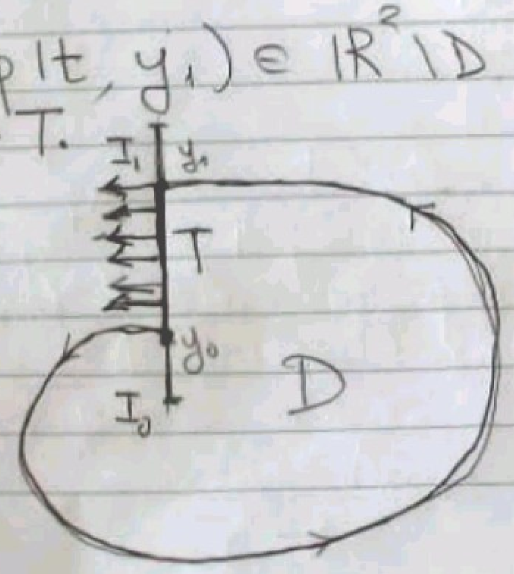


$D = D_1 \cup D_2$, $\partial D = 8$

Για καμπύλες κλειστές με αυτοτομές το Jordan θεώρημα δεν ισχύει. Δεν μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε σημείο του ∂D μια "transversal" ροή είτε βγαίνει, είτε μπαίνει στο D.

Ομοίως το υποσύνολο T_+ του T όπου η λύση εισέρχεται στο D, είναι επίσης ανοικτό. Έχουμε όμως λόγω του ότι $T \subset S =$ διατομή, ότι $T_+ \cup T_- = T$, $T_+ \cap T_- = \emptyset$. Άτοπο διότι το T είναι συνεκτικό!
Άρα $T_+ = \emptyset$.
Συμπεραίνουμε ότι το $D^c = \mathbb{R}^2 \setminus D$ είναι θετικά αναλλοίωτο.

$\Longrightarrow \varphi(t, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ για $t>0$, και κατά συνέπεια $y_2 \in S - T$.



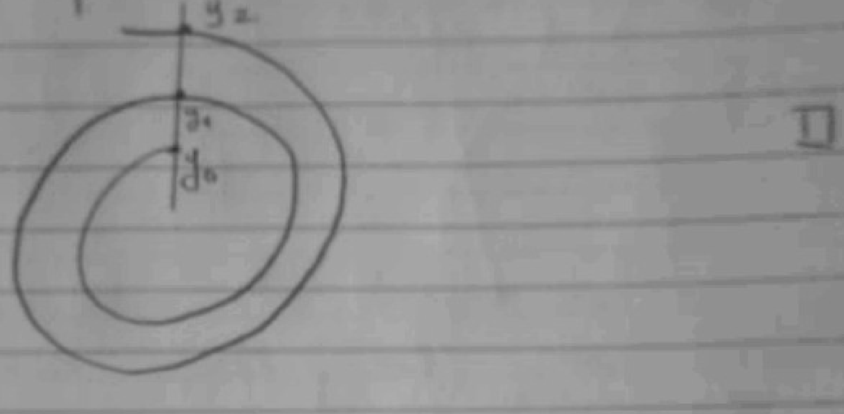
Το σύνολο $S-T$ είναι ένωση δύο διαστημάτων I_0, I_1 με y_0 άκρο του I_0 και y_1 άκρο του I_1

$\boxed{\text{Νεα } 126}$

Το I_0 ευρίσκεται εντός του D. Κατα συνέπεια $y_2 \in I_1$ διότι

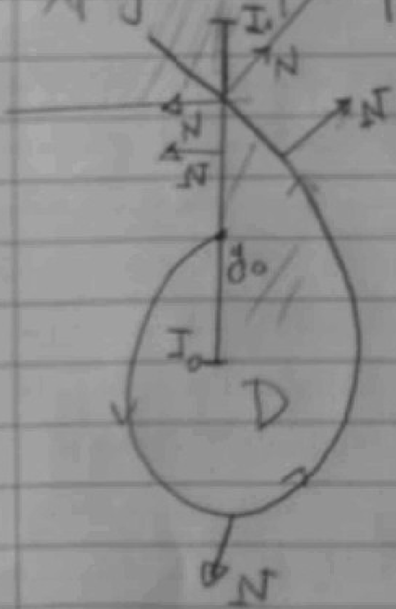
$$\varphi(t,y_1) \notin D \quad \forall t>0,$$

και συνεπώς έχουμε



Συμπλήρωση

Η υπόθεση στην απόδειξη του Λήμματος ότι στο y_1 η $\varphi(t,y_1)$ εξέρχεται της φραγμένης συνιστώσας D χρήζει περαιτέρω διευκρινήσεως. Στο y_1 το ∂D δεν είναι ομαλό και το κάθετο μοναδιαίο $N \perp \partial D$ δεν ορίζεται μοναδικά. Αντιθέτως στο y_0 έχουμε ένα κανό από N.

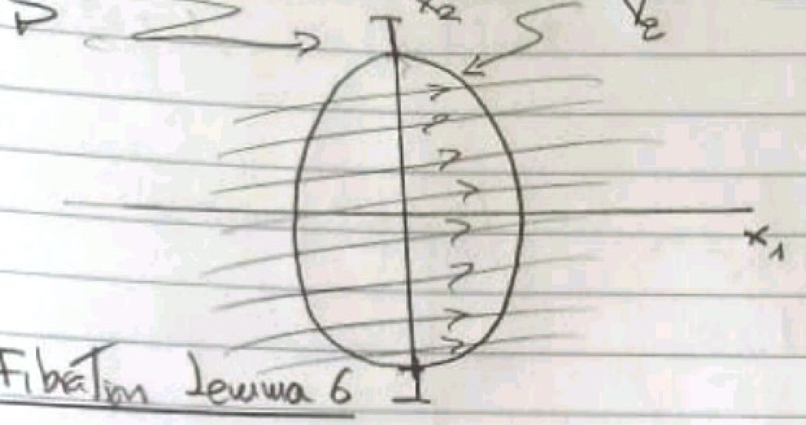


Αρκεί όμως ότι το ευθύγραμμο τμήμα T είναι προσανατολισμένο μέσω του N, και "εξέρχεται από το D στο y_1" προκύπτει από την υπόθεση ότι

$$\frac{d\varphi}{dt}(0,y_1) \cdot N > 0.$$

| Νεα 127 |

Η Ροη σε Περιοχη της Διατομης
(Fibration Lemma).



Σχημα

Fibration Lemma 6

Εστω S διατομη οπως στο Σχημα, και εστω και οι τροχιες $\varphi(t,(0,x_2))$ για $|t|<\varepsilon$. Θα δειξουμε οτι $\exists$ περιοχη V_ε του $(0,0)$ fibrated (fiber = ινα) απο τροχιες
$$t \to \varphi(t,(0,y_2)), \quad |t|<\varepsilon .$$
Δηλαδη καθε σημειο $(x_1,x_2)\in V_\varepsilon$ κειται σε μοναδικη τροχια $t \to \varphi(t,(0,y_2))$, $(0,y_2)\in S$.

Σημειωνουμε οτι η ροη που παραγεται απο την $x' = f(x)$, $f\in C^1$, ειναι επισης C^1, δηλαδη

$$\begin{aligned} x &\to \varphi(t,x) \\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad C^1 \text{ ομαλη αμφιδιαφορισιμη.}$$

Θεωρουμε την απεικονιση

$$(t,y_2) \xrightarrow{\Psi} \varphi(t,(0,y_2)) = \left(\varphi_1(t,(0,y_2)), \varphi_2(t,(0,y_2))\right)$$

$$(14) \qquad D\Psi(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(0,(0,0))}{\partial t} & \dfrac{\partial \varphi_1(0,(0,0))}{\partial y_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_2(0,(0,0))}{\partial t} & \dfrac{\partial \varphi_2(0,(0,0))}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Νεα } 128}$

Εχουμε $\dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = f(\varphi(t,x))$

$\varphi(0,x) = x$

$\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0,(0,0)) = f_1((0,0))$, $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(0,(0,0)) = f_2((0,0))$

$\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}(0,(0,0)) = 0$, $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}(0,(0,0)) = 1$

$\Rightarrow$

(15) $D\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 \\ f_2(0) & 1 \end{pmatrix}$

Διατομη $\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(δεν ειναι παραλληλο το $f(0)$ στο S)

(16) $\therefore \det D\Phi(0,0) \neq 0 \Leftrightarrow \Phi$ αμφιδιαφοριση τοπικα στο $(0,0)$.

Το Flow box θεωρημα προκυπτει απο το θεωρημα της αντιστροφης συναρτησης, για $\varepsilon > 0$ κατάλληλα μικρο.

$\square$

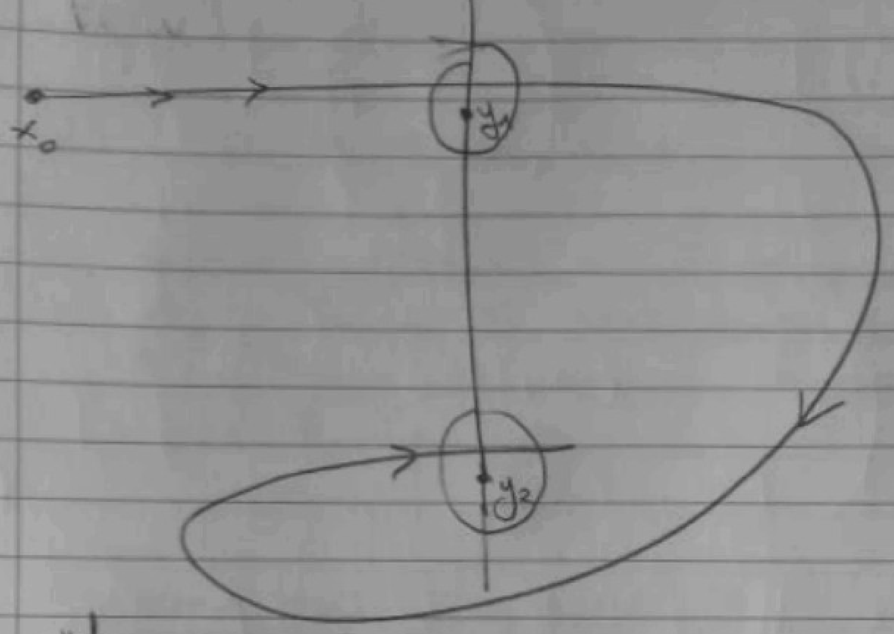
Προταση 7

Εστω $y \in \omega(x_0) \cup \alpha(x_0)$. Τοτε η τροχια του y τεμνει καθε τοπικη διατομη το πολυ σε ενα σημειο.

$\boxed{\text{Νεα 129}}$

Απόδειξη

Έστω ότι $y \in \omega(x_0)$. Το επιχείρημα είναι παρόμοιο αν $y \in \alpha(x)$.



Με εις άτοπον απαγωγή.
Έστω y_1, y_2 δυο σημεία στην $\varphi(t, y)$. Γνωρίζουμε ότι το $\omega(x)$ είναι αναλλοίωτο, άρα $y_1, y_2 \in \omega(x)$.
Κατασκευάζουμε περιοχές V_1 και V_2 των y_1 και y_2 αντίστοιχα, όπως στο Λήμμα 5, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Εφόσον $y_1 \in \omega(x)$ $\exists$ ακολουθία $t_1, t_2, \dots, t_n,$

$\varphi(t_n, x_0) \longrightarrow y_1$ και ομοίως ακολουθία

$t_1', t_2', \dots, t_n', \dots$ $\varphi(t_n', x_0) \longrightarrow y_2$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varphi(t_n, x_0) \in V_1$, $\varphi(t_n', x_0) \in V_2$, και επίσης επιλέγοντας κατάλληλα υπακολουθίες μπορούμε να κατοχυρώσουμε ότι οι $\{t_n\}, \{t_n'\}$ είναι διαπλεκόμενες:

$$t_n < t_n' < t_{n+1}$$

Νεα 130

Προφανως εχουμε δυο ακολουθιες $\{a_n\}, \{b_n\}$ με

$$a_n \in V_1 , \quad b_n \in V_2$$

και με την

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \quad \text{μονοτονη επι}$$

της τροχιας $\varphi(t,x)$, που προφανως αποκλειεται απο το Λημμα 5 της μονοτονιας.

Οδηγηθηκαμε σε ατοπο. Η αποδειξη της Προτασης 7 ειναι πληρης. $\square$

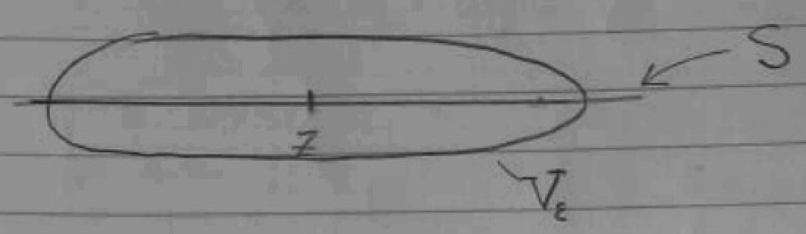
Αποδειξη του Θεωρηματος 3

Απο την υποθεση $x(t) \subset V \subset\subset \hat{U}$ προκυπτει οτι η ημιτροχια $\gamma^+(x_0)$ ειναι φραγμενη, $\overline{\gamma^+(x_0)} \subset \hat{U}$, αρα το $\omega(x_0) \neq \emptyset$, συμπαγες, και συνεκτικο.

Επιλεγουμε $y \in \omega(x_0)$. Θα δειξουμε οτι η $\varphi(t,y)$ ειναι περιοδικη τροχια ($\equiv$ απλη, κλειστη καμπυλη)

Πρωτον $\gamma^+(y) \subset \omega(x_0) \Rightarrow \omega(y) \neq \emptyset$
$\omega(y) \subset \omega(x_0)$. Εστω $z \in \omega(y)$. Θεωρουμε μια τοπικη διατομη στο z ($f(z) \neq 0$ εξ υποθεσεως (13))
και την V_z περιοχη περι το z (Fibration Lemma)

Νεα 131



$z \in \omega(y) \Rightarrow$ η τροχια $\varphi(t,y)$ εισερχεται στο V_ε. Μαλιστα $\exists \{t_n\} \to \infty$ τ.ω.

$\varphi(t_n, y) \to z$, αρα απειρα σημεια $\varphi(t_n, y)$ ευρισκονται εντος της V_ε. Απο το Fibration Lemma γνωριζουμε οτι $\exists\ \tau_n(\varepsilon)$, $|\tau_n(\varepsilon)| < \varepsilon$, τ.ω.

(17) $$\varphi(t_n + \tau_n(\varepsilon), y) \in S.$$

Προφανως χωρις βλαβη της γενικοτητος (μεσω υπακολουθιας) μπορουμε να υποθεσουμε οτι

(18) $$t_{n+1} - t_n > 1$$

Προκυπτει λοιπον απο (17), (18), $\exists\ r > s$

(19) $$\varphi(r, y) \in S \cap V_\varepsilon, \quad \varphi(s, y) \in S \cap V_\varepsilon$$

Νεα 132

Απο την Προταση 7 προκυπτει οτι

(20) $$\varphi(r,y) = \varphi(s,y)$$

και κατα συνεπεια η τροχια ειναι κλειστη αρα περιοδικη: $\exists\ T$ τ.ω. $\varphi(t+T,y)=\varphi(t,y)$ $\forall\ t\in\mathbb{R}$.

Εχουμε καταληξει οτι $\exists\ \gamma$, περιοδικη τροχια

(21) $$\gamma \subset \omega(x_0).$$

Θα δειξουμε οτι

$$\gamma = \omega(x_0).$$

Προς αυτη την κατευθυνση αρκει να δειξουμε οτι

(21) $$\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,x_0),\gamma) = 0,$$

Επωδος (Αποδειξη της (21)).

Θεωρουμε τωρα $z\in\gamma$ και μια μικρη τοπικη διατομη S τ.ω. $S\cap\gamma=\{z\}$

Θεωρουμε τωρα την ε-περιοχη V_ε της διατομης, κεντραρισμενη περι το z. Μεσω του Fibration Λημματος, και επειδη απο (21) το $z\in\omega(x_0)$, μπορουμε να κατασκευασουμε μια ακολουθια $\{t_n\}$

Νέα 133

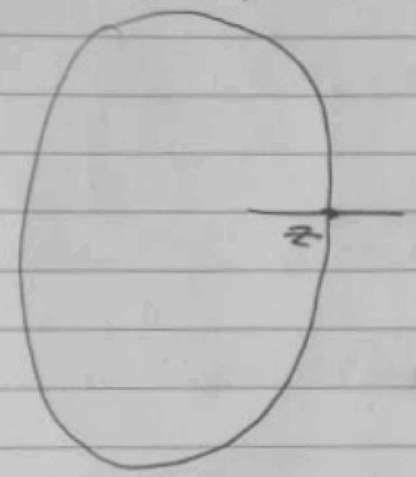
$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$

έτσι ώστε

(22) $\varphi(t_n, x_0) \in S$, $\varphi(t_n, x_0) \longrightarrow z$

(επιλέγοντας V_{ε_n} , $\varepsilon_n \to 0$, $\tau_n(\varepsilon_n) \to 0$)

Θέταμε $x_n = \varphi(t_n, x_0)$. Από το Λήμμα 5



της μονοτονίας, έχαμε ότι η $\{x_n\} \in S$ μονοτονικά συγκλίνει στο z.

και επίσης

(23) $\varphi(t, x_0) \notin S$, $t_{n-1} < t < t_n$, $n=1,2,\dots$

(διότι $\gamma \subset \omega(x_0)$ και $\gamma \neq z$)

- Θα δείξουμε ότι η διαφορές $t_{n+1} - t_n$ είναι φραγμένες.

(σχετίζεται με την περίοδο T της γ)

Έστω $\varphi(T, z) = z$, $T > 0$

Τώρα $x_n \to z \Rightarrow \varphi(T, x_n) \longrightarrow \varphi(T, z) =$

Νεα 13γ

και κατα συνεπεια

$$\varphi(T, x_n) \in V_\varepsilon \quad - \quad (\varepsilon \text{ φιξαρισμενο})$$

και μεσω του Fibration Λημματος $\exists\ \tau_n(\varepsilon)$ - $|\tau_n(\varepsilon)|<\varepsilon$

$$\varphi(T+\tau_n(\varepsilon), x_n) \in S$$

$\therefore$

(24) $$t_{n+1}-t_n \le T+\varepsilon .$$

Δοθεντος $\beta>0$ $\exists\ \delta>0$ τ.ω. για $n\geq n_0$

(25) $$|x_n-z|<\delta \Rightarrow |\varphi(t,x_n)-\varphi(t,z)|<\beta$$

για $|t|\le T+\varepsilon$.

Εστω $t\geq t_{n_0}$, $n\geq n_0$, $t_n\le t\le t_{n+1}$

Εχουμε

$$\begin{aligned} d(\varphi(t,x_0),\gamma) &\le |\varphi(t,x_0)-\varphi(t-t_n,z)| \\ &= |\varphi(t-t_n,x_n)-\varphi(t-t_n,z)| \\ &< \beta \end{aligned}$$

διοτι $|t-t_n|\le T+\varepsilon$

Η αποδειξη του Θεωρηματος ειναι πληρης

$\square$