Διάλεξη 10 — Ευστάθεια + Αστάθεια Μέσω Γραμμικοποίησης

Ορ (Ευστάθεια Σημείων Ισορροπίας)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω.

$$\|\bar{y} - y_0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, y_0) - \bar{y}\| < \varepsilon, \ t \geq 0$$

$$\boxed{\varphi(t, \bar{y}) = \bar{y}}$$

$(\delta < \varepsilon)$

Ορ (Αστάθεια)

$\bar{y}$ ασταθές αν όχι ευσταθές.

Παραδείγματα

Ορ (Ασυμπτωτική Ευστάθεια)

$\bar{y}$ ασ. ευσταθές αν ευσταθές και $\lim \varphi(t$

Θεώρημα: Έστω

$$\boxed{f : W \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n, \quad W \subset \mathbb{R}^n}$$

W = ανοικτό σύνολο.

$$\begin{cases} y' = f(y), & f(\bar{y}) = 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(Η 1) $\operatorname{Re} \lambda(Df(\bar{y})) < 0$

$$\boxed{\varphi(t, y_0) := y(t)}$$

$\boxed{\text{Τότε το } \bar{y} \text{ ασ. ευσταθές.}}$

Θεώρημα 2 :

Έστω (*), f όπως στο Θ1. Ε

(H2) Έστω $\exists$ ιδιοτιμή λ του $Df(\bar{y})$:
$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$

$\boxed{\text{Τότε το } \bar{y} \text{ ασταθές}}$

Απ Θ1

$\boxed{\|\cdot\| = \text{Ευκλείδεια } \mathbb{R}^n}$

Χ.β.γ. $\bar{y}=0$

$\boxed{f(y) = Df(0)y + g(y)}$, $g(0)=0$, $g(y) = o(\|y\|)$

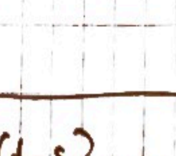
(δηλ. $\frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \to 0$, $\|y\| \to 0$.)

$y' = Df(0)y + g(y) = Ay + g(y)$

- $x' = Ax$, $x(0)=x_0$, $\|e^{At}x_0\| \le K e^{-\alpha t}\|x_0\|$, $-\alpha > \mathrm{Re}\,\lambda\,(Df(\bar{y}))$

αυθαίρετο

φράγμα



- Δοθέντος $m>0$ $\exists$ $\varepsilon>0$

(*) $\boxed{\|y\| < \varepsilon \Rightarrow \|g(y)\| < m\|y\|}$ $(g = o(1))$.

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} g(x(s))\,ds$$

(**) $$\boxed{\|x(t)\| \le K e^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\|\,\|g(x(s))\|\,ds}$$

$$\le K e^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t K e^{-\alpha(t-s)} \|g(x(s))\|\,ds$$

Τωρα Προσοχη – Επιλογη δ, ε, m

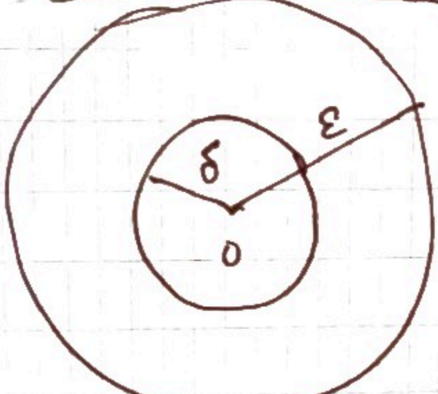
$\boxed{\varepsilon > 0 \text{ Φιξαρισμενο}}$

(I) Επιλογη m

$Km < \alpha$

(II) Επιλογη $\delta < \varepsilon$

$K\delta < \varepsilon$



$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_0\| < \varepsilon$

$(\delta < \varepsilon)$

Απο συνεχη εξαρτηση

($\Leftrightarrow x_0 \to \varphi(t, x_0)$ συνεχης)

$\|\varphi(s, x_0) - \varphi(s, 0)\| \le \varepsilon$ για $0 \le s \le t$, t μικρο

$\Updownarrow$

$\|\varphi(s, x_0)\| \le \varepsilon$, διοτι $\|x_0\| < \delta < \varepsilon$.

$\Updownarrow$

(***) $\|x(s)\| \le \varepsilon$

$t^* = \max\{t \mid (***) \text{ ισχυει, για } s \le t\}$

ΙΣΧΥΡΙΖΟΜΑΣΤΕ ΟΤΙ $t^* = +\infty$

ΑΤΟΠΟ $\boxed{\|x(t^*)\| = \varepsilon}$,

(**) $\Rightarrow$ $0 \le t \le t^*$

$$e^{\alpha t}\|x(t)\| \le \overset{(*)}{K\|x_0\|} + \int_0^t K e^{\alpha s} m \|x(s)\| ds$$

Απο Gronwall (6 7 Διαγεγη 7)

$$e^{\alpha t}\|x(t)\| \leq K\|x_0\| e^{KM t}$$

Για $t=t^*$

$$\varepsilon = \|x(t^*)\| \leq K\|x_0\| e^{(KM-\alpha)t^*} \overset{\text{I}}{\leq} K\|x_0\| \overset{\text{II}}{<} \varepsilon$$

Ατοπο !

#