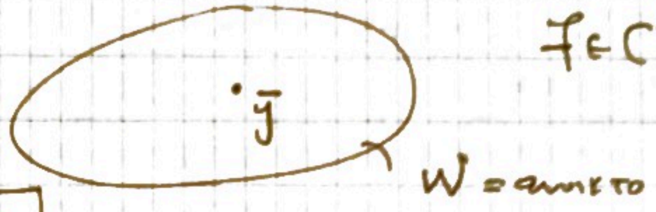
Διάλεξη 11 (Αστάθεια μέσω γραμμικοποίησης)

$f : W \to \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad f \in C^1(W; \mathbb{R}^n)$



(*) $y' = f(y)$ $\quad \boxed{f(\bar y) = 0}$

$$\varphi(t, y_0) = y(t; y_0) =: y(t) \quad (y(0) = y_0$$

Υπόθεση

Έστω ότι $\exists$ ιδιοτιμή λ του $Df(\bar y)$ με θετικό πραγματικό, $Re\,\lambda > 0$.
Τότε το σημείο ισορροπίας $\bar y$ είναι ασταθές.

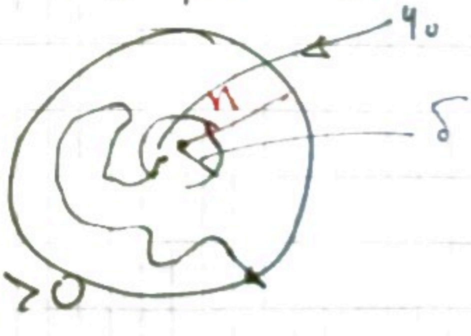
Απ (για λόγους απλότητος συμβολισμών $n = 2$.)

1. $\bar y$ ασταθές : θα δείξουμε ότι $\exists\ \eta > 0$, προσδιορισμένο, για το οποίο υπάρχουν αρχικές τιμές y_0, αυθαίρετα κοντά στο $\bar y$ με αντίστοιχες λύσεις που απομακρύνονται κατά $\eta > 0$ από το y_0 σε κάποια χρονική στιγμή
(ΔΕΝ ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΕΙ ΑΝ ΕΠΑΝΕΡΧΟΝΤΑΙ Ή ΟΧΙ ΚΟΝΤΑ).

Δηλ

$\exists\ \eta > 0$ $\boxed{\text{τ.ω.}}$ $\forall\ \delta > 0$ $\exists\ y_0$, $\|y_0 - \bar y\| < \delta$ με

$$\| \varphi(t_{y_0}, y_0) - \bar y \| = \delta$$



2. **Περίπτωση 1** (εύκολη) $\quad Re\,\lambda_1 > 0$
$Re\,\lambda_2 > 0$

Περίπτωση: $t \to -t$ $\qquad \tilde{y}(t) := y(-t)$

$\boxed{\begin{array}{c} x' = -f(x) \\ \text{ασ. ευσταθές} \end{array}}$ (**)

$(\Theta 1,\ Re\,\lambda(-Df(\bar y)) < 0)$

$\boxed{-f(\bar y) = 0}$

∴ Για το (*) ΟΛΕΣ οι λύσεις απομακρύνονται.

3. <u>Περίπτωση 2</u> (Σαγματικό) $\quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$A = Df(\bar y), \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$(*) \iff y' = Ay + g(y), \qquad y = Pz$$

$$\Big(f(y) = Ay + \underbrace{f(y) - Ay}_{g(y)} \Big)$$

$$Pz' = APz + g(Pz) \iff \boxed{z' = (P^{-1}AP)z + P^{-1}g(Pz)}$$

$$\iff (**)\quad z' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{P^{-1}g(Pz)}_{\hat g(z)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} z + \hat g(z)$$

<u>Παρατήρηση</u>: $\hat g(z) = o(\|z\|)$

Πράγματι:
$$\|\hat g(z)\| = \|P^{-1}g(Pz)\| \le \|P^{-1}\|\,\|g(Pz)\| = \|P^{-1}\| \frac{\|g(Pz)\|}{\|Pz\|}\|Pz\|$$

$$\le \|P^{-1}\| \frac{\|g(Pz)\|}{\|Pz\|}\|P\|\,\|z\|.$$

Έχουμε ότι

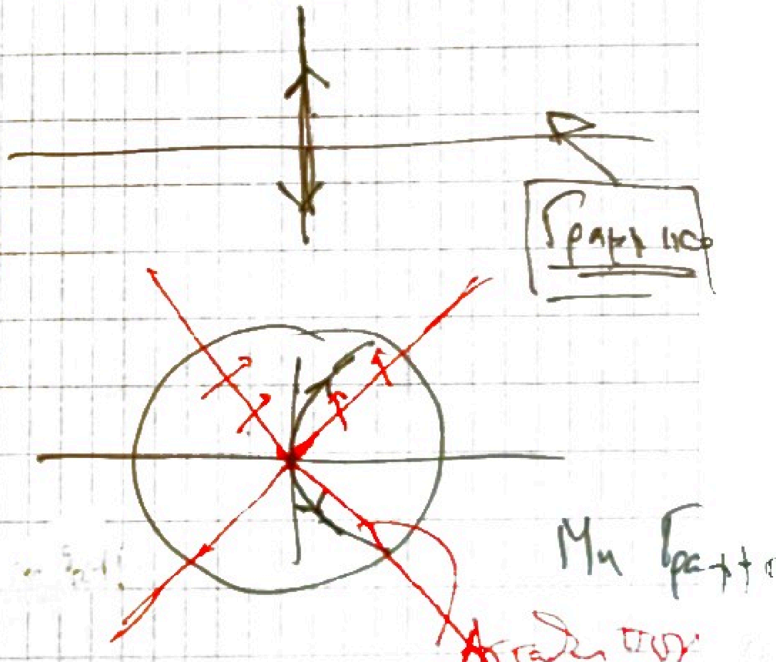
$$(\dagger)\quad \|Pz\| \to 0 \iff \|z\| \to 0.$$

Πράγματι:

$$(\Leftarrow)\qquad \|Pz\| \le \|P\|\,\|z\|$$

$$(\Rightarrow)\qquad \|z\| = \|P^{-1}Pz\| \le \|P^{-1}\|\,\|Pz\|. \quad \square$$

$$(**)\quad \begin{cases} z_1' = \lambda_1 z_1 + \hat{g}_1(z_1,z_2) \\ z_2' = \lambda_2 z_2 + \hat{g}_2(z_1,z_2) \end{cases} \qquad \lambda_1 \le 0 < \lambda_2$$



$$K^+ = \{(z_1,z_2) \mid z_2 > |z_1|\}$$

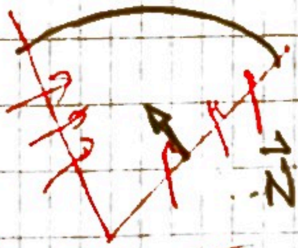
$$U = \{(z_1,z_2) \mid \|z\| < \eta\}$$

Επιλογές

a) Επιλέγουμε $m > 0$ τ.ω. $\lambda_2 - \lambda_1 - 4m > 0$

b) Επιλέγουμε η τ.ω. $\|\hat{g}(z)\| \le m\|z\|$ για $\|z\| \le \eta$

Ισχυρισμός: Όλες οι λύσεις με $z(0) \in K^+ \cap U$ βγαίνουν εκτός του $K^+ \cap U$ από το $\partial U \cap K^+$

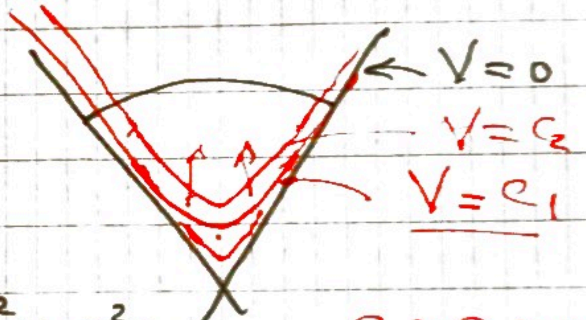


$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

(A) Το Γραμμικό Μέρος του Διαν. Πεδίου

$$\vec{N}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 z_1\\ \lambda_2 z_2\end{bmatrix} = \frac{z_1}{\sqrt{2}}\left(-\lambda_1+\lambda_2\right) > 0$$

$$V(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 - z_1^2\right)$$



$$\nabla V(z_1,z_2)\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 z_1\\ \lambda_2 z_2\end{bmatrix}$$

$$= (-z_1, z_2)(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) = -\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 > 0.$$

$c_2 > c_1 > 0$

(B) Όλο το Διαν. Πεδίο.

$z(0) \in K^+ \cap U$

(1) $$\frac{d}{dt} V(z_1(t), z_2(t)) = \nabla V(z_1,z_2)\begin{bmatrix}\lambda_1 z_1 + \hat{g}_1\\ \lambda_2 z_2 + \hat{g}_2\end{bmatrix}$$

$$= -\lambda_1 z_1^2 - z_1\hat{g}_1 + \lambda_2 z_2^2 + z_2\hat{g}_2$$

$$= \left(-\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2\right) + \left(z_2\hat{g}_2 - z_1\hat{g}_1\right)$$

(2)

⑤

$\|\hat{g}\| \leq m\|z\|$
$\Rightarrow |\hat{g}_i| \leq m\|z\|$

$\|z\| := |z_1| + |z_2|$

(2) $z_2\hat{g}_2 - z_1\hat{g}_1 \geq -\left[|z_2||\hat{g}_2| + |z_1||\hat{g}_1|\right]$

$\geq -m\left[|z_2|\|z\| + |z_1|\|z\|\right]$

$\geq -m\left(|z_1|+|z_2|\right)^2$

(1), (2) $\Rightarrow$

(3) $\frac{d}{dt}V(z_1(t), z_2(t)) \geq -\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 - m\left(|z_1|+|z_2|\right)^2$

$\geq \quad \text{''} \quad \text{''} \quad - m\left(|z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\right)$

$\geq \underline{(\lambda_2 - m)|z_2|^2} - \underline{2m|z_1||z_2|} - \underline{(\lambda_1 + m)|z_1|^2}$

$\geq (\lambda_2 - \lambda_1 - 4m)|z_2|^2 > 0$

Coda

(4) $V(z(t)) \geq V(z(0)) \Rightarrow$

$|z_2(t)|^2 - |z_1(t)|^2 \geq |z_2(0)|^2 - |z_1(0)|^2 = 2V_0 > 0$

$\therefore \quad \boxed{|z_2(t)|^2 \geq 2V_0 + |z_1(t)|^2}$ (5)

Χρησιμοποιώντας στο (3)

$\frac{d}{dt}V(z_1(t), z_2(t)) \geq 2(\lambda_2 - \lambda_1 - 4m)V_0$

$\square$