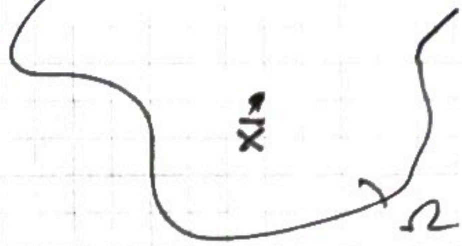
Διάλεξη 12 (Θεωρία Ευστάθειας Liapunov)

$$\boxed{(*) \quad x' = f(x)}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$



Συνάρτηση Liapunov

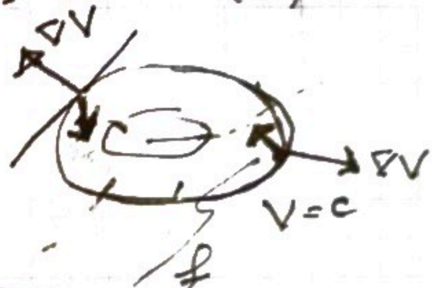
$$V : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(1) \quad \frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) \overset{(*)}{=} \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)).$$

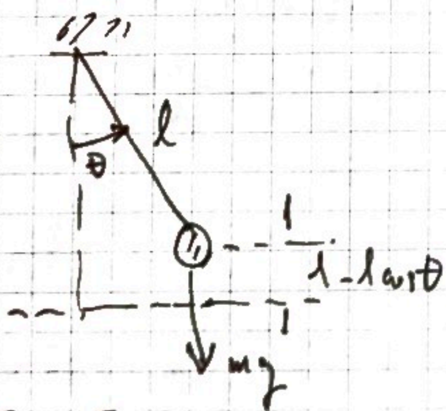
$f(\bar{x}) = 0$

Βασική ιδιότητα: $\nabla V(x) \cdot f(x) \le 0. \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{d}{dt} V(x(t)) \le 0.$$



Παράδειγμα 1 (Εκκρεμές με τριβή)



$$(3) \quad \boxed{\theta'' + \frac{g}{l} \sin\theta = 0} \quad \text{(Χωρίς τριβή)}$$

$F = -(k l \theta' + mg \sin\theta)$ τριβή

$a = l\theta''$

$a = \dfrac{F}{m}$

$E = E_K + E_\Delta$

$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2$

$E_\Delta = mgl(1 - \cos\theta)$

$$\therefore \quad (4) \quad \boxed{\theta'' = -\frac{k}{m}\theta' - \frac{g}{l}\sin\theta} \quad \text{(με τριβή)}$$

Μετατροπή (4) σε σύστημα:

$x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$

(4) ⇔ (5)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

$$E =: V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m (l x_2)^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

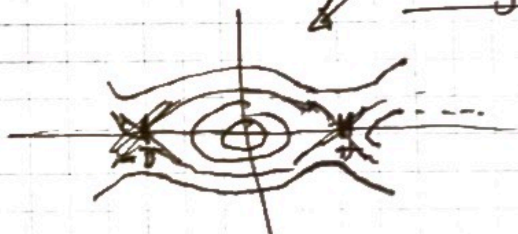
$$\nabla V = (mgl \sin x_1, m l^2 x_2)$$

$$\nabla V \cdot f = \begin{pmatrix} mgl \sin x_1 \\ m l^2 x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix} = -k l^2 x_2^2 \leq 0.$$

$$\therefore \frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0.$$

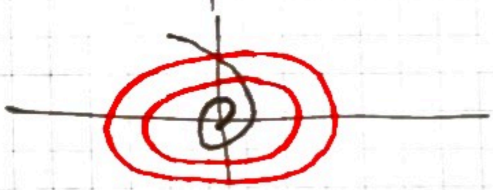
$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$

Καθιστάμενο Σύστημα



Επίπεδο φάσης (3)

Επίπεδο φάσης (4)



Παράδειγμα 2

Συστήματα Κλίσης

$$x' = -\nabla E(x)$$

$V(x) := E(x)$,

$$\nabla V \cdot (-\nabla E) = -|\nabla E|^2 \leq 0.$$

Κεντρικό Ερώτημα

Έστω V ικανοποιεί (2).

$\Rightarrow$

$$\lim_{t\to+\infty} V(x(t)) \quad \exists \quad (\text{μονοτονία})$$

Πότε μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα

$$\exists \lim_{t\to+\infty} x(t) \quad ?$$

Θεώρημα (Łojasewicz)

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πραγματική αναλυτική, και

$x(t)$ λύση των,

$$x' = -\nabla f(x)$$

που ορίζεται στο $[0, \infty)$.

Τότε έχουμε την διχοτομία

ή $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \infty$

ή $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \bar{x}$,

$$f(\bar{x}) = 0.$$

$f: U \to \mathbb{R}$
αναλυτική
$Z_f = \{ x \mid f(x) = 0$
$\exists\, \alpha \geq 0,\ C > 0$
$\mathrm{dist}(x, Z_f)^\alpha \leq C$

Θα το αποδείξουμε αργότερα

Ορισμος 1

ανοικτο

$V \in C^1$, ορισμενη στο $U \ni \bar{x}$, $f(\bar{x}) = 0$

$\cap$

$\mathbb{R}^n$

Θετικα Ορισμενη : $V(\bar{x}) = 0$, $V(x) > 0$, $x \neq \bar{x}$, στο U

Αρνητικα Ορισμενη : αν $-V$ θετικα ορισμενη.

Ορισμος 2

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot \nabla f(x)$$

Ορ 3

$V(x)$ Συναρτηση Liapunov αν $V \in C^1(U)$, θετικα ορισμενη

και $\dot{V} \leq 0$ στο U.

Αν $\dot{V}$ ειναι αρνητικα ορισμενη στο U, λεγεται

αυστηρη συναρτηση Liapunov.

Συστήματα Κίνησης / dissipative systems (Ενεργειακή απώλεια)

(1) Συναρτησιακό στο Χώρο φάσης

(2) Μετρική στο Χώρο φάσης (Κινητική)

Παράδειγμα 3

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2' = -\beta y_1 - \alpha y_2 - \frac{1}{\beta} y_1^3 \end{cases} \qquad \alpha, \beta > 0$$

(α) Σ.Ι. (Σημεία Ισορροπίας).

(β) Ευστάθεια $(0,0)$ (γραφικά)

(γ) Να προσδιοριστεί ο μεγαλύτερος δίσκος $B(0, \rho_0)$ όπου η $\dot{V}(y_1, y_2)$ είναι αρνητικά ορισμένη, όπου $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$.

Λύση

(α) $-\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \qquad \text{(i)}$

$-\beta y_1 - \alpha y_2 - \frac{1}{\beta} y_1^3 = 0 \qquad \text{(ii)}$

$\text{(i)} \Rightarrow y_2 = \frac{\alpha}{\beta} y_1$

$\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$

$$-\beta \cancel{y_1} - \alpha \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cancel{y_1} - \frac{1}{\beta} y_1^{\cancel{3}\,2} = 0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{y_1 = 0, \quad y_2 = 0}$$

Institute of Mathematics
Polish Academy of Sciences

(6)

(β) $$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f^1_{y_1}(0,c) & f^1_{y_2}(0,c) \\ f^2_{y_1}(0,c) & f^2_{y_2}(0,c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} =: A$$

$$\operatorname{tr} A = -2\alpha, \quad \det A = \alpha^2+\beta^2$$
$$(\lambda_1+\lambda_2<0) \qquad (\lambda_1\cdot\lambda_2>0)$$

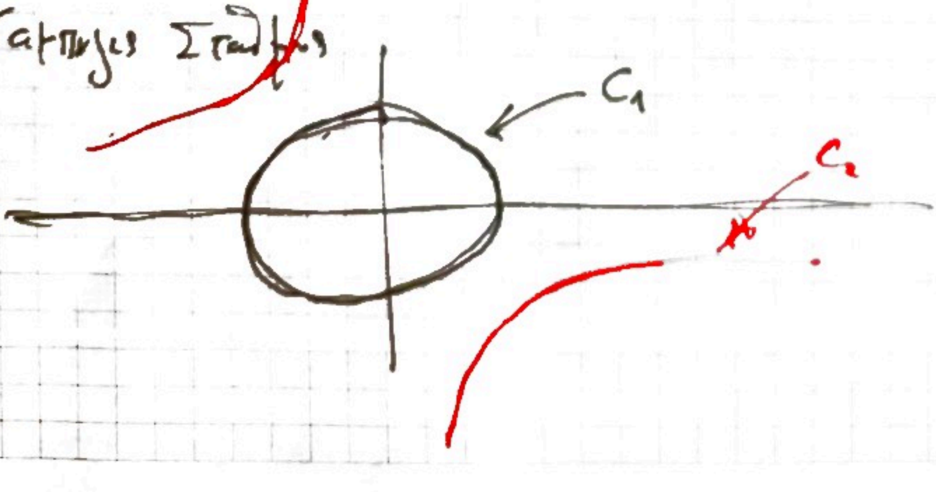
(Μιγαδικοί)

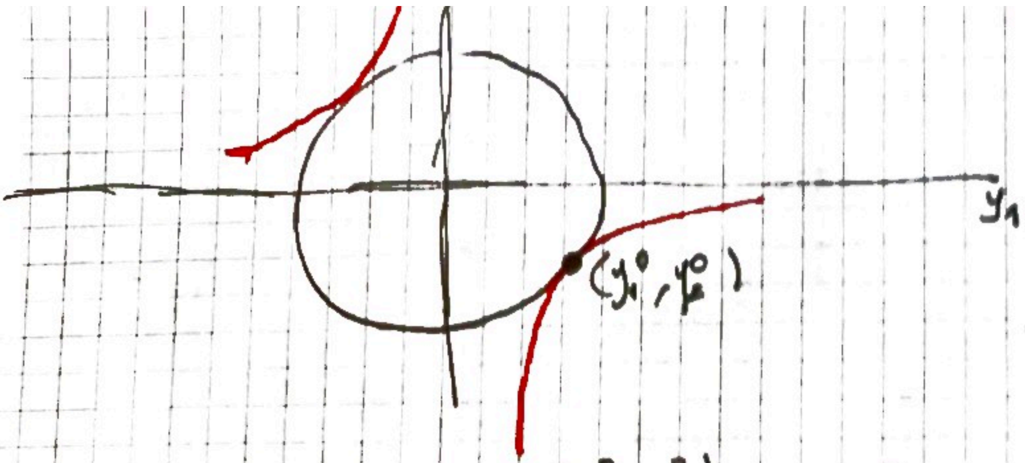
(γ) $$\dot V = (y_1,y_2)\cdot\left(-\alpha y_1+\beta y_2,\ -\beta y_1-\alpha y_2-\frac{1}{\beta}y_1^3\right)$$
$$= -\alpha\left(y_1^2+y_2^2\right)-\frac{1}{\beta}y_1^3y_2$$
$$= -\alpha\left[\left(y_1^2+y_2^2\right)+\frac{1}{\alpha\beta}y_1^3y_2\right]$$

$$y_1^2+y_2^2=c_1>0$$

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha\beta}y_1^3y_2=c_2>0}$$

Καμπύλες Στάθμης





$c_1 = c_2$ $\quad (y_1^0, y_2^0)$; $y_2^0 = -y_1^0$

$$(y_1^0)^2 + (y_2^0)^2 = r_0^2 \implies 2(y_1^0)^2 = r_0^2 \implies y_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} r_0$$

$$-\frac{1}{\alpha\beta}(y_1^0)^3 (y_2^0) = r_0^2 \implies$$

$$-\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} r_0\right)^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} r_0\right) = r_0^2$$

$$\iff$$

$$r_0 = 2\sqrt{\alpha\beta}.$$

$\square$

Exercises

10.13, 10.18, 10.17, 10.21, 10.23

#