Διάλεξη 13 (Θεώρημα των Liapounov)

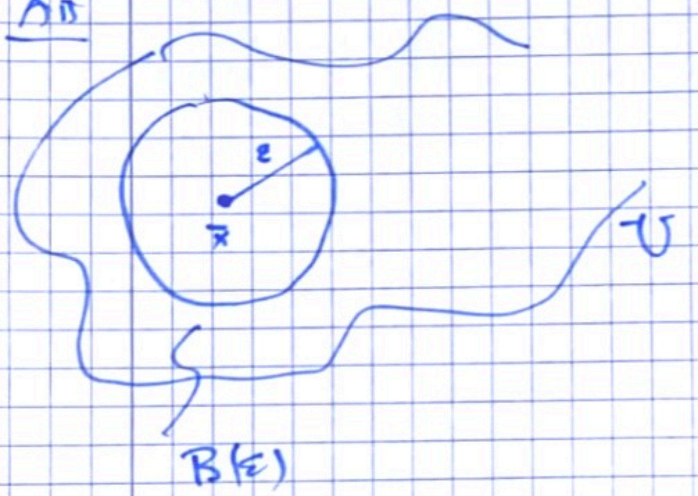
$(*)\quad x' = f(x), \quad f \in C^1(U)$

Θεώρημα 1 $\quad f(\bar{x}) = 0, \; \bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό

(1) Έστω V συνάρτηση Liapounov στο U ως προς $\bar{x}$.
$\Rightarrow \bar{x}$ ευσταθές

(2) Αν $\dot{V}$ αυστηρή τότε $\bar{x}$ ασ. ευσταθές.

Απ



(1)

(1) $\quad m := \min_{\partial B(\varepsilon)} V(x) \overset{\text{θετικά ορ.}}{\Longrightarrow} m > 0.$

$V(\bar{x}) = 0$, V συνεχής $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ τ.ω.

(2) $\quad V < m, \; x \in \overline{B(\delta)}, \; (\text{χ.β.γ. } \delta < \varepsilon)$

Θα δείξουμε ότι $x(0) \in B(\delta) \Rightarrow x(t) \in B(\varepsilon), \; t \geq 0$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V \cdot \dot{x}(t) = \dot{V}(x(t)) \leq \\ m > V(x(0)) \geq V(x(t)) \end{array}\right.$$

$\therefore$ $x(t)$ δεν τέμνει ποτέ το $\partial B(\varepsilon)$ (από (3))

(Ολική ύπαρξη διότι η λύση δεν εκρήγνυται)

(2)

(2) $\dot{V}$ αυστηρά σημαίνει $\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη στο U : $\dot{V}<0$ για $x\neq\bar{x}$.

Παρατήρηση

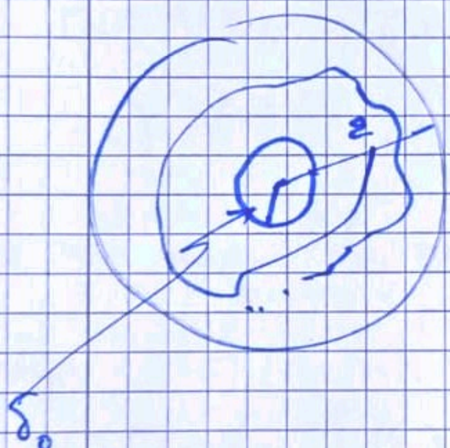
Από (1) και μόνο προκύπτει ότι αν $\exists\ \{t_n\}$ τ.ω. $x(t_n)\longrightarrow\bar{x} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} x(t)=\bar{x}$.

(γιατί;).

Θα δείξουμε το (2) με εις άτοπον απαγωγή:

Παρατήρηση $\Rightarrow$ Έστω $\|x(t)-\bar{x}\|\geq\delta_0>0$, $t\geq T>0$

και έστω από (1) ότι $x(t)\in\overline{B(\varepsilon)}$



$$B^{*}:=\overline{B(\varepsilon)\setminus B(\delta_0)}$$

$\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη $\Rightarrow$

$$\max_{B^{*}}\dot{V}=-\gamma<0 \quad (4)$$

$\underline{t\geq T}$

$$\frac{d}{dt}V(x(t))=\dot{V}(x(t))\overset{(4)}{\leq}-\gamma$$

$$\Rightarrow V(x(t))-V(x(T))=\int_T^t\dot{V}(x(s))ds$$

$$\leq\int_T^t-\gamma ds$$

$$=-\gamma(t-T)\longrightarrow-\infty$$

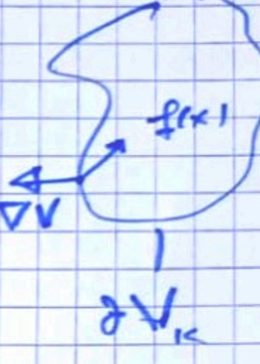
Άτοπο! $\square$

<u>Ορ</u> (<u>Πεδίο Έλξης</u>)

Π.Ε. σημείου $\bar{x}$ είναι το σύνολο $\Sigma = \{ x_0 \in U \mid \varphi(t, x_0) \to \bar{x}$, $t \to +\infty \}$.

<u>Πρόταση 2</u>

- $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, $V \in C^1(U)$
- $V_k = \{ x \in U \mid V(x) < k \}$, $k > 0$
- $\bar{V}_k \subset U$



(α) V_k φραγμένο, $f(\bar{x}) = 0$, $\bar{x} \in V_k$

(β) $V > 0$ για $x \in U \setminus \{\bar{x}\}$

(γ) $\dot{V} < 0$ για $x \in U \setminus \{\bar{x}\}$.

Τότε το σύνολο V_k είναι θετικά αναλλοίωτο και $V_k \subset \Sigma$.

<u>Απ</u>

$\underline{x \in \partial V_k}$ $\quad \nabla V(x) \cdot f(x) = \dot{V}(x) < 0$

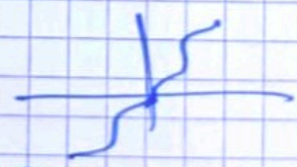
$\Rightarrow$ V_k θετικά αναλλοίωτο.

Το υπόλοιπο πανομοιότυπο με την απόδειξη του Θ1.

$\square$

<u>Παράδειγμα</u> (Θεωρία Ελέγχου) [Παράδειγμα 10.37]

Έστω $\begin{cases} \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sigma \mapsto \psi(\sigma) \quad C^1 \\ \psi(0) = 0 \quad \sigma\psi(\sigma) > 0 \\ \int_0^\sigma \psi(s)ds \to +\infty, \ |\sigma| \to +\infty \end{cases}$



$k, c, \rho > 0$ σταθερές

(1) (Σ) $x' = -kx - \xi$, $\boxed{\xi' = \psi(\sigma)}$, $\sigma = cx - \rho\xi$ (Ε)

Επίδραση στη λύση μέσω της ξ (δυναμική εξαναγκασμού forcing).

④

Εξηγούμε την κίνηση του $x(t)$

Αν $cx - \rho\xi > 0 \Rightarrow \psi(cx-\rho\xi) > 0 \Rightarrow \xi' > 0$

άρα ανέλιξη $\Rightarrow x'$ μειώνεται.

Να δειχθεί ότι κάθε λύση της (Δ) τείνει στο μηδέν. (π.χ. ολικά προσελκυστικό)

Λύση

1) Αλλαγή Μεταβλητών $\sigma = cx - \rho\xi$

$(x, \xi) \longrightarrow (\sigma, \xi)$

$$\begin{cases} (\Delta) \begin{cases} \sigma' = cx' - \rho\xi' = c(-kx - \xi) - \rho\psi(\sigma) \\ \qquad = -k\sigma - \xi(k\rho + c) - \rho\psi(\sigma) \end{cases} (2) \\ (E) \quad \xi' = \psi(\sigma) \end{cases}$$

2) Σημεία Ισορροπίας του συστήματος (Δ)(Ε)

$\psi(\sigma) = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$

$-k\sigma - \xi(k\rho + c) - \rho\psi(\sigma) = 0 \overset{\sigma=0}{\Longrightarrow} \boxed{\xi = 0}$

$\bar{x} = (0,0), \quad x = (\sigma, \xi)$

3) Κατασκευή Συνάρτησης Liapunov

(3) $V(\sigma, \xi) := \beta\xi^2 + \Psi(\sigma), \quad \Psi(\sigma) = \int_0^\sigma \psi(s)ds$

(> 0)

Επιλογή β

(4) $$\dot V(\sigma,\xi) = \nabla V \cdot \begin{bmatrix} -k\sigma - \xi(k\rho+c) - \rho\psi(\sigma) \\ \psi(\sigma) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \psi(\sigma) \\ 2\beta\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k\sigma - \xi(k\rho+c) - \rho\psi(\sigma) \\ \psi(\sigma) \end{bmatrix}$$

$$= \psi(\sigma)\left(-k\sigma - \xi(k\rho+c) - \rho\psi(\sigma)\right) + 2\beta\xi\psi(\sigma)$$

$$= \xi\psi(\sigma)\left[2\beta - (k\rho+c)\right] - k\sigma\psi(\sigma) - \rho\psi^2(\sigma).$$

Επιλέγουμε

(5) $$2\beta = k\rho + c$$

$\therefore$

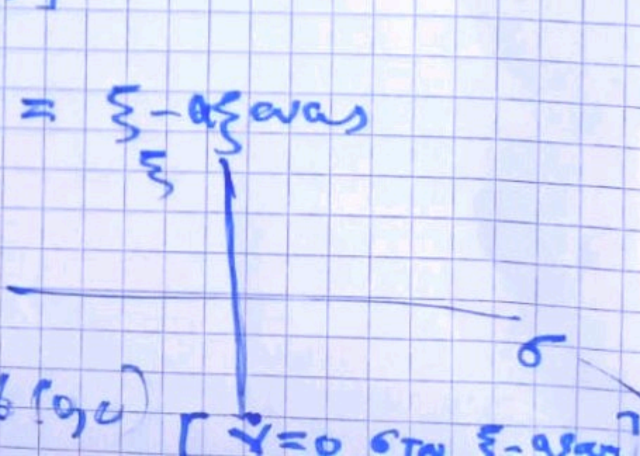
(6) $$\dot V(\sigma,\xi) = -k\sigma\psi(\sigma) - \rho\psi^2(\sigma)$$

Παρατηρούμε

(α) $V > 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(β) $\{\dot V = 0\} = \{\sigma = 0\}$ = ξ-άξονας

(γ) $\dot V \le 0$ στο $\mathbb{R}^2$



Προσοχή: ΔΕΝ ισχύει ότι $\dot V < 0$ για $(\sigma,\xi) \neq (0,0)$

(δ) Ο ξ-άξονας είναι αναλλοίωτος ως (ε)
προς το σύστημα (2):

$$\begin{bmatrix} -k\sigma - \xi(kp+c) - p\psi(\sigma) \\ \psi(\sigma) \end{bmatrix}\Bigg|_{\sigma=0} = \begin{bmatrix} -\xi(kp+c) \\ 0 \end{bmatrix}$$

εφαπτόμενο στον ξ-άξονα.

4) (A priori) φράγματα λύσεων

$$\frac{d}{dt} V(\sigma(t),\xi(t)) = \dot{V}(\sigma(t),\xi(t)) \le 0$$

$$\Rightarrow V(\sigma(t),\xi(t)) \le V(\sigma(0),\xi(0)).$$

$$\parallel$$

$$\beta\xi^2 + \Phi(\sigma)$$

Λήμμα

$V(\sigma,\xi) = \beta\xi^2 + \Phi(\sigma)$ είναι "coercive"

δηλ.

$$\lim_{\|(\sigma,\xi)\| \to +\infty} V(\sigma,\xi) = +\infty$$

Απ. Λήμματος

Αν $|\xi| \to +\infty$ προφανές.

Έστω $|\sigma| \to +\infty \Rightarrow \Phi(\sigma)$ εξ υποθέσεως.

5) (Μεγιστο Συμπαγες Αναλλοιωτο υποσυνολο)

$$E := \{ (\sigma,\xi) \mid \dot{V}(\sigma,\xi) = 0 \}.$$

Θεωρουμε το Μεγιστο Συμπαγες Αναλλοιωτο υποσυνολο M της E

(Αναλλοιωτο = Αναλλοιωτο θετικα + αρνητικα).

Απο (6) και (β)

$$E \subset \{\xi\text{-αξονας}\}.$$

Διανυσματικο Πεδιο (δ) στον ξ-αξονα

$$\begin{bmatrix} -\xi(\kappa\rho + c) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{(0,0)\} = M}$$

Θεωρημα LaSalle (Θ 10.14)

$$\Rightarrow \lim (\sigma(t),\xi(t)) \longrightarrow (0,0).$$

□