(1)

Διάλεξη III (Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα / Αρχή Αναλλοιώτου LaSalle (1)

Ορ $\{\varphi(t,\cdot)\}$ ΔΣ, $\varphi(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

(i) $\gamma^+(x_0) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid x=\varphi(t,x_0) \mid t\geq 0\}$ (Θετική ημ. τροχιά)

$\gamma^-(x_0) := \{ \text{''} \mid \text{''} \mid t\le 0\}$

(ii) $\omega(x_0) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists \{t_n\}\to+\infty,\ \varphi(t_n,x_0)\to x\}$

$\alpha(x_0) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists \{t_n\}\to-\infty,\ \text{''}\ \}$.

Θεώρημα 1: Έστω $\gamma^+(x_0)$ φραγμένο $\subset\mathbb{R}^n$. Τότε ισχύουν

(i) $\omega(x_0)\neq\emptyset$

(ii) $\omega(x_0)$ συμπαγές (κλειστό-φραγμένο)

(iii) $\omega(x_0)$ συνεκτικό

(iv) $\omega(x_0)$ θετικά+αρνητικά αναλλοίωτο ($\varphi(t,\omega(x_0))\subset\omega(x_0)$ $\forall t\in\mathbb{R}$).

Άσκηση ($\limsup E_n$, $\liminf E_n$) $\bigcap(\bigcup E_k)$, $\bigcup(\bigcap E_k)$

Απ

(i),(ii) $\omega(x_0) = \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\{\varphi(t,x)\mid t\geq\tau\}}$ (κλασικό θεωρ. Ανάλ.)

"ουρές", φθίνουσα ακολουθία $E_n\subset E_{n-1}$

(iii)

(Υπενθύμιση: $\{E_n\}$ συμπαγή σε μετρικό χώρο X, $E_{n+1}\supset E_n$, $E_n\neq\emptyset$

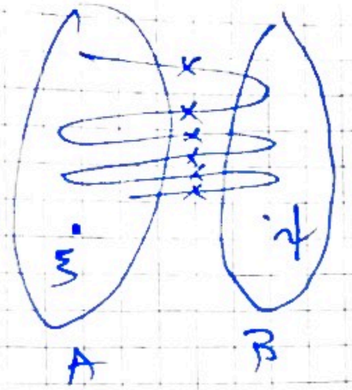
Θα δείξουμε ότι $\bigcap E_n\neq\emptyset$

Επιλέγουμε $x_n\in E_n \Rightarrow \{x_n\}\subset E_1 \Rightarrow \exists$ υπακολουθία $x_{n_k}\to x$

Σταθεροποιούμε n, E_n. Έχουμε ότι $\{x_{n_k}\}\subset E_n$, για $n_k>n$. Άρα $x\in E_n$. Το n αυθαίρετο. Άρα $x\in\bigcap E_n$)

iii) Με εις άτοπον απαγωγή ②

Έστω $\omega(x_0) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A, B κλειστά στο $\mathbb{R}^d$



$d(A,B) > 0$

$\inf \{ |x-y| \mid x \in A, y \in B \}$.

(A, B συμπαγή διότι $\omega(x_0)$ συμπαγές)

$\xi \in A$, $\psi \in B$

$\exists \{t_n\} \to +\infty$, $\varphi(t_n, x_0) \longrightarrow \xi$

$\exists \{t_n'\} \longrightarrow +\infty$, $\varphi(t_n', x_0) \longrightarrow \psi$

Κατάλληλη επιλογή

$t_n < t_n' < t_{n+1} < t_{n+1}' < \dots$

Επιλέγουμε δ, μικρό

$d(x(t_n), \xi) < \delta$, $d(x(t_n'), \psi) < \delta$

$\therefore \exists \{t_n''\}$, $t_n'' \in (t_n, t_n')$ τ.ω

$d(x(t_n''), A) = \frac{3\delta}{2}$, $d(x(t_n''), B) \geq \frac{\delta}{2}$

$x(t_n'') \longrightarrow \eta \notin A \cup B$ $\cancel{\emptyset}$

$\eta \in \omega(x_0)$

(υπακολουθία των $\{t_n''\}$)

(iv) Έστω $\xi \in \omega(x_0)$ και $\tau \in \mathbb{R}$
θα δείξουμε ότι $\varphi(\tau, \xi) \in \omega(x_0)$.

Έστω $\{t_n\} \to +\infty$, $\varphi(t_n, x_0) \to \xi$

$$\varphi(\tau, \xi) = \varphi(\tau, \lim_{t_n \to +\infty} \varphi(t_n, x_0))$$

$$= \lim_{t_n \to +\infty} \varphi(\tau, \varphi(t_n, x_0)) \quad (x \to \varphi(t,x) \text{ συνεχής})$$

$$= \lim_{t_n \to +\infty} \varphi(\tau + t_n, x_0) \quad (\text{Ομάδα})$$

$$\in \omega(x_0)$$

□

Σχόλιο

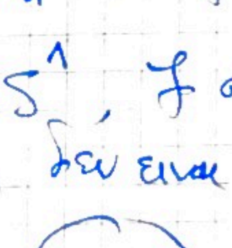
Η αναλλοιωτότητα χρησιμοποιεί το $t \to \varphi(t, x_0)$ και την (συνέχεια). Για διακριτά δυναμικά συστήματα, π.χ.

$$\{T_n\}, \quad T_n(x) = f(x)$$

$$f : S^1 \to S^1, \quad f \text{ συνεχής}$$

το ω-οριακό σύνολο εν γένει δεν είναι αναλλοίωτο:

Έστω $f(x) = 2x \mod 1$,



Έστω $x_0 = \frac{1}{3}$

Τροχιά

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots\right\}$$

$$\omega(x_0) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Θεώρημα 2 (LaSalle αρχή Αναλλοίωτων)

Έστω V διαφορίσιμη στο U, $V: U \to \mathbb{R}$

Ορίζουμε

$$\dot{V}(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(\varphi(t,x))$$

Υποθέτουμε ότι

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad , \quad x \in U$$

Ορίζουμε

$$E := \{x \in G \mid \dot{V}(x) = 0\}$$, G συμπαγές υποσύνολο του U

$\gamma^+(x_0) \subset G$

Θεωρούμε το Μέγιστο Αναλλοίωτο υποσύνολο του E, το M.

Συμπέρασμα: $\omega(x_0) \subset M$

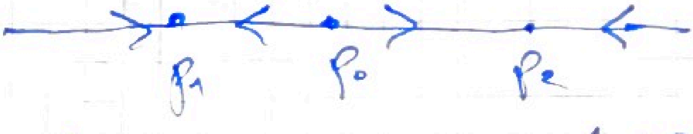
και ομοίως

$$d(\varphi(t,x_0), M) \to 0 \quad , \quad t \to +\infty.$$

Σχόλια

1) $\omega(x_0)$ αναλλοίωτο υποσύνολο $G \Rightarrow \exists M$ μέσω Λήμματος του Zorn ($\subseteq$ διάταξη, υποσύνολα του G αναλλοίωτα)

2) Εν γένει $\omega(x_0) \subsetneq M$



3) Αν $\varphi(t,x_0)$ προέρχεται από $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, τότε $\dot{V}$ συμπίπτει

Απόδειξη Θ2

α) $\gamma^+(x_0)\subset C \Rightarrow \overline{\gamma^+(x_0)}\subset C \Rightarrow$ συμπαγές $\Rightarrow \omega(x_0)\neq\emptyset$

β) $t\to V(\varphi(t,x_0))\downarrow$

$\exists \lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t,x_0)) = L$, και από συμπάγεια

$V(C)$ φραγμένο, $\Rightarrow L>-\infty$.

$L=\inf\{V(x)\mid x\in\overline{\gamma^+(x_0)}\}$.

γ) Έστω $y\in\omega(x_0)$, $\exists\{t_n\}$, $\varphi(t_n,x_0)\longrightarrow y$

$V(y)=V\left(\lim_{t_n\to+\infty}\varphi(t_n,x_0)\right)$

$=\lim_{t_n\to+\infty}V(\varphi(t_n,x_0))$ (συνέχεια της V)

$=L$

$\omega(x_0)$ αναλλοίωτο $\Rightarrow V(\varphi(t,y))\equiv L$

$\Rightarrow \boxed{\dot V(y)=0}$

$\therefore\ \omega(x_0)\subset E$, αναλλοίωτο.

Ισχύει ότι θεωρούμε το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο M στο E.

$M\cup\omega(x_0)$ επίσης στο E

"Μεγιστικότητα" $\Rightarrow$ $M\cup\omega(x_0)=M$

δηλ. $\omega(x_0)\subset M$.

$\square$

the 'Steiner problems have no nontrivial

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η αρχή των αξόνων (0,0) στο επίπεδο φάσης για την εξίσωση ← τριβή

$$x'' + (x')^3 + g(x) = 0, \quad g(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}$$

είναι ασ. ευσταθής.

Λύση

$$U(x) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi = 2\left(\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - 1\right)$$

$$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + U(x_1)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -g(x_1) - x_2^3 \end{cases}$$

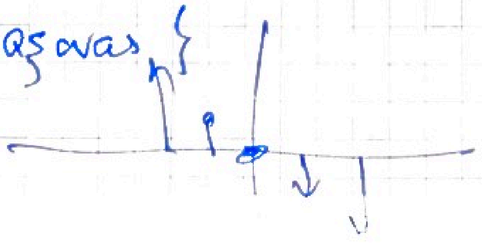
V θετικά σε περ. του (0,0)

$$\dot{V} = V_{x_1}x_2 + V_{x_2}\left(-g(x_1) - x_2^3\right)$$
$$= g(x_1)x_2 + x_2\left(-g(x_1) - x_2^3\right)$$
$$= -x_2^4 \le 0.$$

Ευστάθεια ✓

Θεωρούμε $U = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$

$E \subset \{x_1\text{-άξονας}\}$



$\Rightarrow M = \{(0,0)\}$ ...