Διάλεξη 16 (Θεώρημα Poincaré-Bendixson)

Poincaré-Bendixson

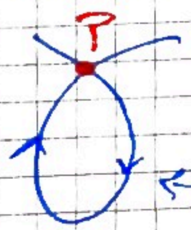
1 Εισαγωγή

(*) $x' = f(x)$, $f \in C^1(U;\mathbb{R}^2)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό

Υπενθύμιση

1) $x(t_1) = \hat{x}(t_2) \implies \hat{x}(t) = x(t-(t_2-t_1))$

2) Περιοδικές x : $x(t+T) = x(t) \iff$ κλειστές καμπύλες



X όχι δυνατόν αν $f(P) \neq 0$

3) **Θεώρημα Jordan**

Το συμπλήρωμα απλής κλειστής καμπύλης Γ(t) (συνεχούς) στο επίπεδο έχει ακριβώς δύο ανοικτές συνιστώσες με την Γ(t) το σύνορο και των δύο. (μία φραγμένη μία μη --)

Θεώρημα Schoenflies (επέκταση)

Αν J_1, J_2 απλές κλειστές στο επίπεδο ∃ ομοιομορφισμός του επιπέδου στον εαυτό του $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$h(J_1) = J_2$

Άσκηση

Έστω A φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2 \implies A^c$ έχει ακριβώς μία μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα

Θεώρημα (Poincaré–Bendixson) $\big|_{x(0)=x_0}$

Έστω $x(t)$ λύση της (*) $\forall t$, $\gamma^+ = \{ x(t) \mid t \geq 0 \}$ φραγμένη.

Έστω ότι

$$\omega(x_0) \cap \{ x \mid f(x) = 0 \} = \emptyset$$

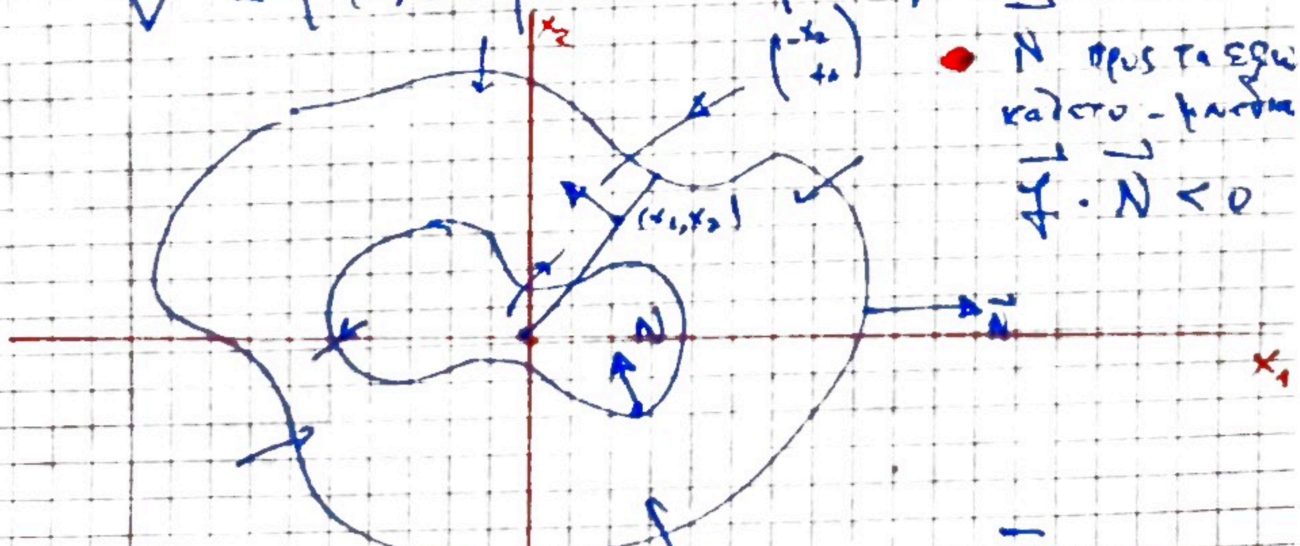
$\therefore$ $\omega(x_0) \equiv$ κλειστή τροχιά (περιοδική)

Ειδική Περίπτωση (Δακτύλιος)

Υποθέσεις

- Έστω $0 < \alpha(\theta) < \beta(\theta)$ 2π-περιοδικές συναρτήσεις συνεχείς – κατά τμήματα διαφορίσιμες

$$V = \{ (r,\theta) \mid \alpha(\theta) \leq r \leq \beta(\theta) \}$$



- $\vec{N}$ προς τα έξω κάθετο-διάνυσμα: $\vec{f} \cdot \vec{N} < 0$

- $f(x_1,x_2) \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall (x_1,x_2) \in \bar{V}$

Συμπέρασμα: $\exists$ κλειστή τροχιά εντός του V.

(5

1. **Πρόταση :**

$$\frac{dr}{d\theta}(\theta;r^*) = G(r(\theta;r^*),\theta)$$

Ορίζουμε $\rho(\theta) = r(\theta+2\pi;r^*)$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\left(r(\theta+2\pi;r^*)\right)$$

$$= G(r(\theta+2\pi;r^*),\theta+2\pi)$$

$$= G(r(\theta+2\pi;r^*),\theta)$$

$$= G(\rho(\theta),\theta)$$

Παρατήρηση:

Έστω $f(x,t+T) = f(x,t)$ $\forall t$ (περιοδική).

Έστω $y(t)$ λ-ση της $x' = f(x,t)$

τ.ω. $y(0) = y(T)$

$\Rightarrow$ $y(t+T) = y(t)$ $\forall t$

Απ

Έστω $x(t) = y(t+T)$

$x'(t) = y'(t+T) = f(y(t+T),t+T)$

$= f(y(t+T),t)$

$= f(x(t),t)$

Επίσης $x(0) = y(T)$

$= y(0)$

Μοναδικότητα

$\Rightarrow$ $x(t) \equiv y(t)$

Επίσης

$\rho(0) = r^*$

Μοναδικότητα $\Rightarrow$ $\rho(\theta) \equiv r(\theta)$ $\Leftarrow$

$$r(\theta+2\pi;r^*) \equiv r(\theta;r^*)$$

2. Επιστρέφουμε στις Καρτεσιανές Συντ.

$$(x_1(t),x_2(t)) = (r(t)\cos\theta(t),\ r(t)\sin\theta(t))$$

Θα δείξουμε ότι $\exists\, T>0$ τ.ω.

$$x(t+T) = x(t)$$

$$x(t) = (r(t)\cos\theta(t),\ r(t)\sin\theta(t))$$

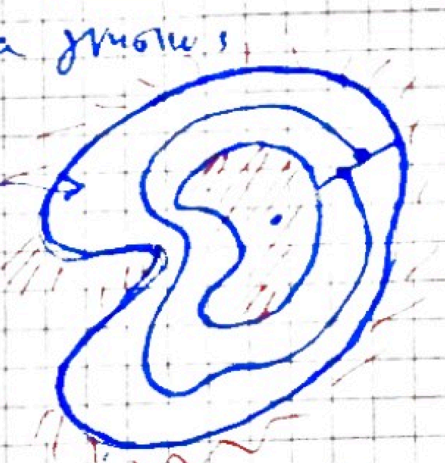
$\theta' = g_2 > 0 \Rightarrow t \to \theta(t)$ αύξουσα γνησίως

$\min g_2(r,\theta) = m > 0$

$\vee$

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t g_2(r(s),\theta(s))\,ds \geq mt$$

Δακτύλιος



$\therefore \exists!\, T$ τ.ω.

$$\theta(T) = 2\pi$$

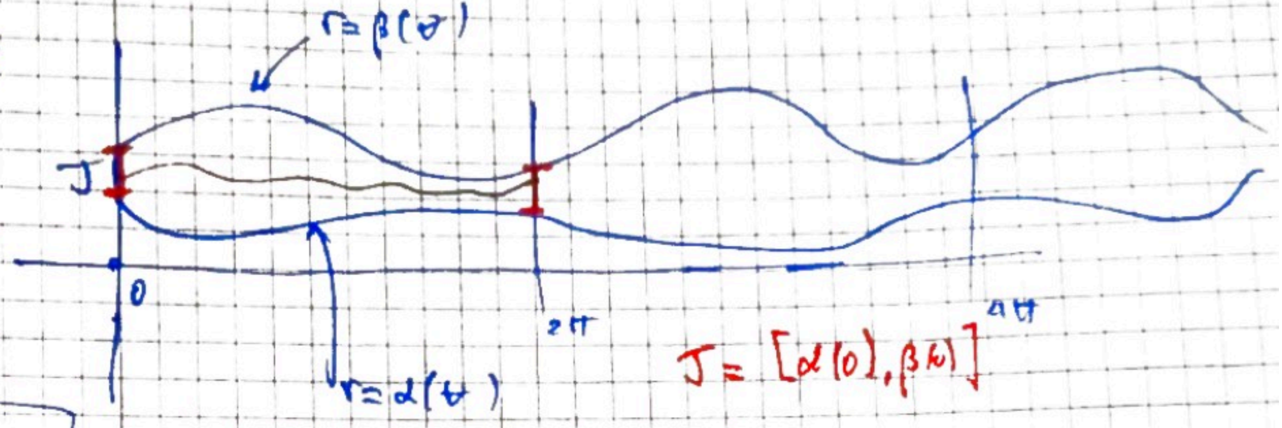
$$x(T) = (r(T)\cos\theta(T),\ r(T)\sin\theta(T)) = (r(\theta(T);r^*)\cos\theta(T),\ r(\theta(T);r^*)\sin\theta(T))$$

$$= (r(2\pi;r^*)\cos 2\pi,\ r(2\pi;r^*)\sin 2\pi) = (r^*,0) = x(0).$$

$\square$

Απ. Ειδικής Περ.

Χ.β.γ. $\vec{f} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} > 0$ (αριστερόστροφη ροή)



Διατάξεις

$$x_1' = f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

$x_1 = r\cos\theta$

$$\boxed{x_1' = r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta'}$$

$x_2 = r\sin\theta$

$x_2' = r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta'$

(1) $r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = f_1(r\cos\theta, r\sin\theta)$

(2) $r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' = f_2(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\boxed{(1)\times\cos\theta + (2)\times\sin\theta}$

$r'\cos^2\theta - r\sin\theta\cos\theta\,\theta' = \cos\theta\, f_1$

$r'\sin^2\theta + r\sin\theta\cos\theta\,\theta' = \sin\theta\, f_2$

Add

(3) $\boxed{r' = \cos\theta f_1 + \sin\theta f_2}$

$r'\sin\theta\cos\theta - r\sin^2\theta\,\theta' = \sin\theta\, f_1$

$\boxed{-(1)\sin\theta + (2)\cos\theta}$

$r'\cos\theta\sin\theta + r\cos^2\theta\,\theta' = \cos\theta\, f_2$

(4) $\boxed{r\theta' = \cos\theta f_2 - \sin\theta f_1}$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{aligned} r' &= \cos\theta\, f_1 + \sin\theta\, f_2 =: g_1(r,\theta) \quad (3)\\ \theta' &= \frac{\cos\theta\, f_2 - \sin\theta\, f_1}{r} =: g_2(r,\theta) \quad (4)\end{aligned}\right.$$

Απόδειξη

1. Παρατήρηση

$$g_2 = \frac{\cos\theta\, f_2 - \sin\theta\, f_1}{r} = \frac{r\cos\theta\, f_2 - r\sin\theta\, f_1}{r^2} = \frac{x_1 f_2 - x_2 f_1}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(f_1, f_2\right)\cdot\left(-x_2, x_1\right) > 0$$

(5) $$\boxed{\frac{dr}{d\theta} = \frac{g_1(r,\theta)}{g_2(r,\theta)} = G(r,\theta)}, \quad G(r,\theta+2\pi) = G(r,\theta)$$

$$\boxed{r(0) = r_0} \quad \theta \mapsto r(\theta; r_0).$$

Προσοχή: Εν γένει $r(\theta+2\pi; r_0) \neq r(\theta; r_0)$

Παρατήρηση

Το V είναι θετικά αναλλοίωτο $\Rightarrow$ $r = r(\theta)$ $\exists$ για κάθε θ

($\nexists$ έκρηξη) [ολική ύπαρξη]

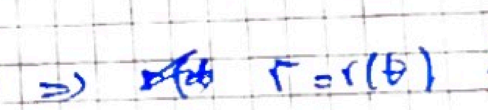
Απεικόνιση Περιόδου (Απεικόνιση Poincaré)

$$\Pi(r_0) = r(2\pi; r_0) \qquad \Pi(r^*) = r^* \Leftrightarrow r(2\pi; r^*) = r^*$$

$$r_0 \in [\alpha(0), \beta(0)] \longrightarrow \Pi(r_0) \in [\alpha(2\pi), \beta(2\pi)] = [\alpha(0), \ldots$$

Π συνεχής (από θεώρημα συνεχούς εξάρτησης ως προς Α.Σ.)

$\exists$ σταθερό σημείο r^*



$f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής $\Rightarrow$ $\exists$ σταθερ. σημείο

Τομή με διαγώνιο

Ισχυρισμός: $r(\theta; r^*)$ είναι 2π-περιοδική

(Brouwer's Θεώρημα σταθερού σημείου)

(ομοιομορφικό στο B) Κυρτό, συμπαγές