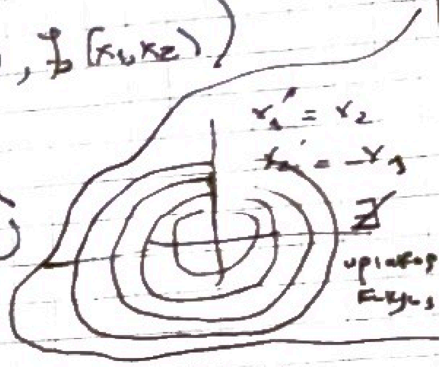
Διάλεξη 17

Το Poincaré – Bendixson Θεώρημα

1.

Θεώρημα 1

(*) $\quad x' = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad , \quad f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$



$f \in C^1(\hat{U}; \mathbb{R}^2)$, $\hat{U}$ ανοικτό, $\subset \mathbb{R}^2$

Υπόθεση : $x(t)$ ορίζεται για $t \geq 0$, $\quad x(t) \subset V \subset\subset \hat{U}$

$\omega(x_0) \cap \{x \mid f(x) = 0\} = \emptyset$

Συμπέρασμα : $\omega(x_0) = \{ p(t), \ t \in [0, T], \ p(t+T) = p(t)$
p λύση της (*)$\}$ = Περιοδική Τροχιά

Θεώρημα 2 (ελαφρώς ισχυρότερο)

Έστω $\varphi(t, x_0)$ η λύση της (*), $\varphi(t, x_0) \in V \subset\subset \hat{U}$, $t \geq 0$

Τότε

i) ([illegible])

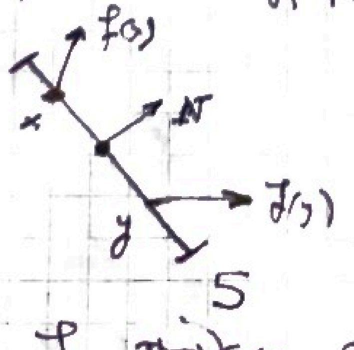
ii) $\omega(x_0)$ = Περιοδική Τροχιά

iii) $\forall y \in \omega(x_0)$ ισχύει ότι $f\big|_{\alpha(y)} = f\big|_{\omega(y)} = 0$

#

2. Τοπικές Διατομές

Ορ : $S \subset \hat{U}$, ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα **Τοπική Διατομή**



Σχ 1

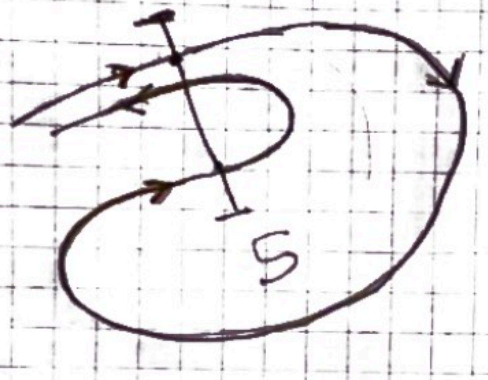
Σημ : Λόγω συνέχειας

i) $f(x) \cdot N \geq 0 \ \forall x \in S$

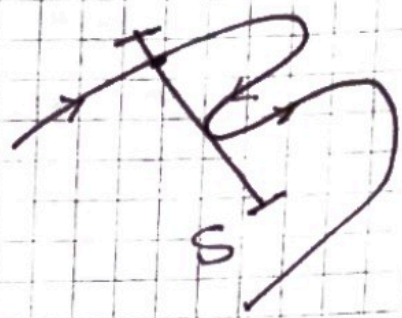
ii) $f(x) \cdot N \leq 0$ —

αν το Δ.Σ. f πουθενά εφαπτόμενο

Παρατήρηση



Σύμφωνα αυτά το Σχ 2 δεν είναι δυνατό



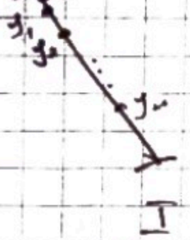
Σχ 2

3. **Ορ** (Μονότονες ακολουθίες)

Έστω I ευθύγραμμο τμ. στο $\mathbb{R}^2$ (όχι αναγκαστικά τοπική διατομή)

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ μονότονη αν $y_n - y_0 = \lambda_n (y_1 - y_0)$, $n = 2, 3, \dots$

$1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$



Ορ (Μονότονη ακολουθία κατά μήκος τροχιάς)

$\{x_n = \varphi(t_n, x_0)\}$ μονότονη ως προς την τροχιά αν

$t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$

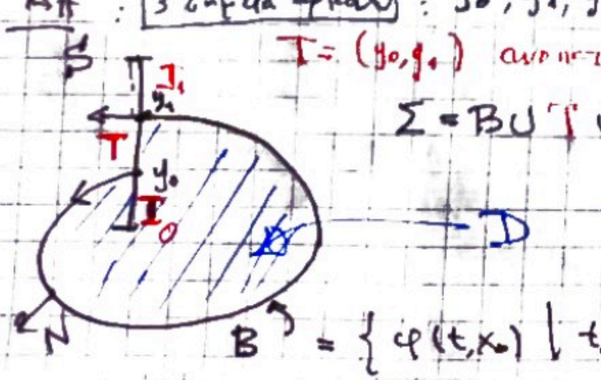
4. **Λήμμα**

Έστω S τοπική διατομή και $y_0, y_1, \dots, y_n \dots \in S$ $\dots \gamma_+(x_0)$)

Αν $\{y_n = \varphi(t_n, x_0)\}$ μονότονη ως προς την τροχιά

τότε μονότονη ως προς την διατομή.

Απ : $\boxed{\text{3 σημεία αρκούν}}$: y_0, y_1, y_2



$I = (y_0, y_1)$ ανοιχτό $\subset S$

$\Sigma = B \cup T \cup \{y_0, y_1\}$

απλή απλή κλειστή

Jordan $\Rightarrow$ ∂D χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δυο συνεκτικά ανοιχτά : D φραγμένο, $\mathbb{R}^2 \setminus D$ μη φραγμένο

$B = \{\varphi(t, x_0) \mid t_0 < t < t_1\}$

③ κατα τμηματα ομαλο. N ορίζεται (εκτος γωνιων)

ⓐ Το T, ευθύγραμμο $\subset \Sigma$, είναι προσανατολισμένο με την κάθετη N

το έξω – μέσα καλώς ορισμένο κατά

Υποθέτουμε ότι στο y_1 η τροχιά εξέρχεται της D

Θα δείξουμε ότι $\forall$ σημείο του T εξέρχεται

T_+ = σημεία εισόδου ($T\cdot N<0$), T_- = σημεία εξόδου ($T\cdot N>0$)

$T \subset S \Rightarrow T = T_- \cup T_+$, $T_- \cap T_+ = \emptyset$

Συνεχής εξάρτηση από Αρχικές Συνθήκες $\Rightarrow T_+, T_-$ ανοικτά.

Συνεκτικότητα $(y_0, y_1) \Rightarrow T = T_-$

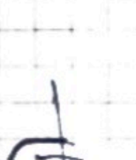
ⓑ Έπεται: D^c θετικά αναλλοίωτο (Είσοδος από B αποκλείεται λόγω μοναδικότητας)

$\Rightarrow \boxed{y_2 \in S - T}$

ⓒ Για να καταλήξουμε ότι $y_0 < y_1 < y_2$ αρκεί να δείξουμε ότι I_1 εκτός (ένα σημείο αρκεί).

Λόγω ⓑ $\Rightarrow y_2 \in I_1$.

Έχουμε για $\varepsilon > 0$ μικρό $\varphi(\varepsilon, y_1)$ εκτός, δηλ στο D^c

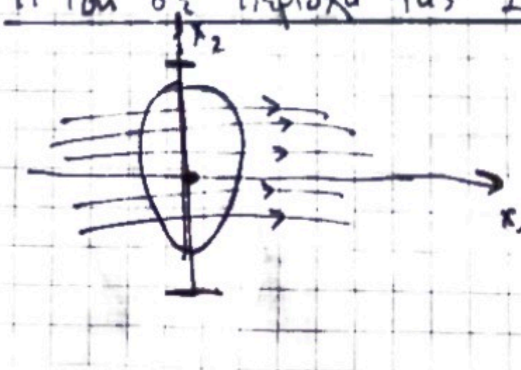


Φιξάρουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο, μικρό, θα υπάρχει για ένα σημείο X στο ... συνεχής καμπύλη που θα ενώνει το $\varphi(\varepsilon, y_1)$ με το X που δεν τέμνει το Σ.

$\therefore I_1$ εκτός.

□

5. Η Ροή σε Περιοχή της Διατομής (Fibration Lemma) [Συστήματα αυτόνομα] Flow Box Lemma



Λήμμα 2

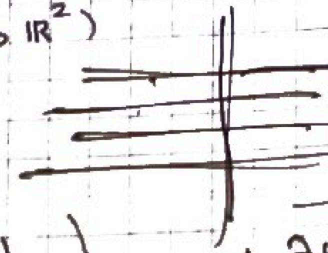
Έστω S διατομή όπως στο Σχ., $(0,0) \in S$.

$\exists$ περιοχή V_ε του $(0,0)$ τ.ω.

$\forall (x_1, x_2) \in V_\varepsilon$ βρίσκεται σε μοναδική τροχιά $t \to \varphi(t, (0, y_2))$, $(0, y_2)$, $|t| < \varepsilon$

Απ

$x \to \varphi(t,x)$, C^1 αμφιδιαφόριση ομαλή $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$
$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = f(\varphi(t,x)) \\ \varphi(0,x) = x \end{cases}$$

Θεωρούμε την

$$(t, y_2) \xrightarrow{\Psi} \varphi(t,(0,y_2))$$

$$D\Psi(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0,(0,0)) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}(0,(0,0)) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(0,(0,0)) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}(0,(0,0)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 \\ f_2(0) & 1 \end{pmatrix}$$

$0 = (0,0)$

$\varphi(0,(0,y_2)) = (0, y_2)$

$\varphi_1(0,(0,y_2)) = 0$

$\varphi_2(0,(0,y_2)) = y_2$

Διατομή $\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det \Psi(0,0) \neq 0$

Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης.

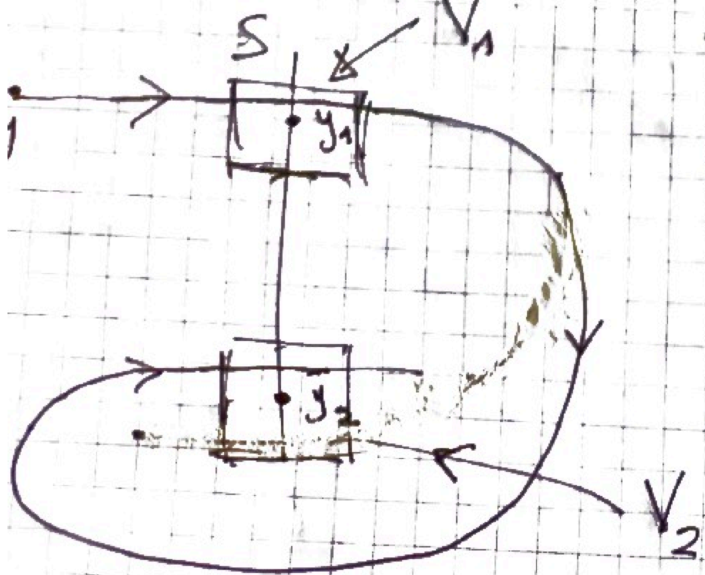
$\square$

Λήμμα 3

Έστω $y \in \omega(x_0) \cup \alpha(x_0)$. Τότε η $\gamma(y)$ (τροχιά του y) τέμνει κάθε διατομή το πολύ σε ένα σημείο

Απ (Με Άτοπο)

Έστω $y \in \omega(x_0)$, και έστω y_1, y_2 σημεία της $\varphi(t,y)$ στην S.



V_1, V_2 flow boxes από Λήμμα 2, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_k \cap S = I_k$

Η τροχιά $\varphi(t,y)$ τέμνει τα I_k άπειρες φορές:

$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$

$$\varphi(t_n, x_0) \xrightarrow{=a_n} y_1, \quad \varphi(t_n', x_0) \xrightarrow{=b_n} y_2$$

και επιλέγοντας υπακολουθία της $\{t_n'\}$ μπορούμε να υποθέσουμε

$$t_n < t_n' < t_{n+1} \quad \ldots$$

Προφανώς το Λήμμα 1 οδηγεί σε άτοπο. $\square$

7. Απόδειξη Θεωρήματος 1

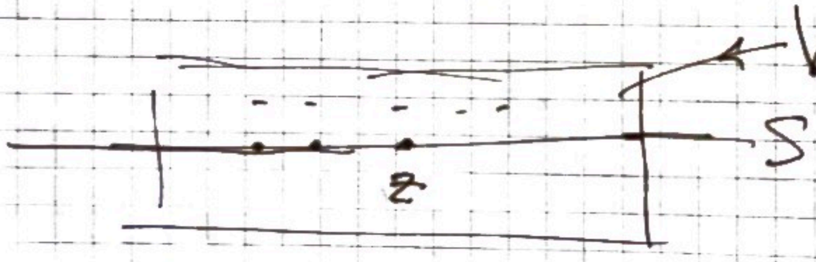
Εξ' υποθέσεως η τροχιά φραγμένη $\Rightarrow$ $\omega(x_0) \neq \emptyset$, συνεκτικό.
Έστω $y \in \omega(x_0)$.

Ισχυρισμός 1: $\varphi(t, y)$ περιοδική.

$$\gamma^+(y) \subset \omega(x_0) \Rightarrow \omega(y) \neq \emptyset, \quad \omega(y) \subset \omega(x_0)$$

Έστω $z \in \omega(y)$. Εξ' υποθέσεως $f(z) \neq 0$

Θεωρούμε τοπική διατομή S στο z



Λήμμα 2

$$\exists \{t_n\} \to +\infty, \quad \varphi(t_n, z) \to z, \quad \varphi(t_n, z) \in V_\varepsilon$$

Λήμμα 2 $\Rightarrow$ $\exists\ \tau_n(\varepsilon)$, $|\tau_n(\varepsilon)| < \varepsilon$, τ.ω.

(1) $$\varphi(t_n + \tau_n(\varepsilon), y) \in S$$

Χ.Β.Γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι

(2) $$t_{n+1} - t_n > 1$$

$\therefore\ \exists\ r > s$ τ.ω.

(3) $$\varphi(r, y) \in S \cap V_\varepsilon, \quad \varphi(s, y) \in S \cap V_\varepsilon$$

Λήμμα 3 $\Longrightarrow$

(4) $$\varphi(r,y)=\varphi(s,y)$$

Συμπέρασμα: Ισχυρισμός αποδείχθη., δηλ $\exists\ \gamma$, ώστε

$$\gamma \subset \omega(x_0).$$

<u>Ισχυρισμός 2</u>: $\gamma = \omega(x_0)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι

| $z \in \omega(y) = \gamma$

(5) $$\lim d(\varphi(t,x_0),\gamma)=0$$

<u>Απόδειξη της (5)</u>

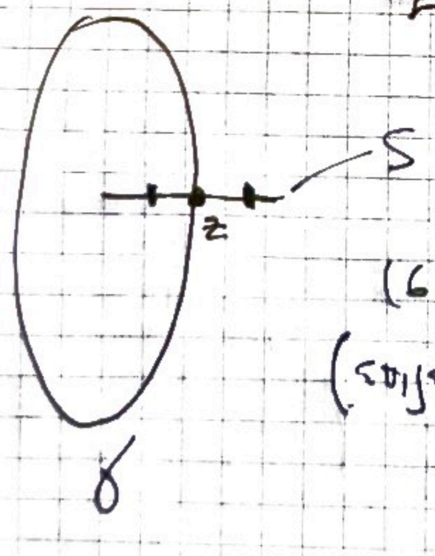
Έστω S τοπική διατομή, $S \cap \gamma = \{$

$z \in \omega(x_0) \Rightarrow \exists \{t_n\}$

$t_0 < t_1 < t_2 < \dots$

(6) $\varphi(t_n,x_0) \to z$, $\varphi(t_n,x_0) \in$

(επιλέγοντας $\forall \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$, και $\tau_n(\varepsilon_n) \to$



γ

Θέτουμε

$x_n = \varphi(t_n, x_0)$