Διάλεξη 19

Παρατήρηση (επί της Απόδειξης των Θεωρημάτων 1 και 2 της Διάλεξης 18

α) Η Απόδειξη του Θεωρήματος 1 (Poincaré - Bendixson) δείχνει ότι αν $\gamma \subset \omega(x_0)$ κλειστή τροχιά (δηλ. περιοδική λύση), τότε $\gamma = \omega(x_0)$. Αν $x_0 \notin \gamma$, τότε η γ είναι οριακός κύκλος, $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,x),\gamma)=0$.

β) Η Απόδειξη του Θεωρήματος 2 πορεύεται ως εξής. Θέλουμε να δείξουμε ότι αν το $\omega(x_0)$ περιέχει σημεία ισορροπίας καθώς και αλλά ξ, τ.ω. $f(\xi)\neq 0$, τότε αναγκαστικά $\omega(\xi)=\{x \mid f(x)=0\}$.

Πάμε με άτοπο: έστω ότι $\exists\, q\in\omega(\xi)$, $f(q)\neq 0$. Τότε δείχνουμε ότι η τροχιά $\gamma=\{\varphi(t,\xi) \mid t\in\mathbb{R}\}$ είναι κλειστή. Εφόσον το $\omega(x_0)$ είναι αναλλοίωτο έπεται ότι $\gamma\subset\omega(x_0)$, και από το α) συμπεραίνουμε ότι $\gamma=\omega(x_0)$, που συγκρούεται με την υπόθεση το $\omega(x_0)$ περιέχει και σημεία ισορροπίας.

Πρόταση 1

Ένα θετικά (αρνητικά) αναλλοίωτο συμπαγές σύνολο K περιέχει ένα από τα επόμενα

α) Σημείο ισορροπίας

β) Οριακό κύκλο

γ) Κλειστή τροχιά όχι αναγκαστικά οριακό κύκλο. (Συνεχές κλειστών τροχιών όπως στην $x_1'=x_2$, $x_2'=-x_1$)

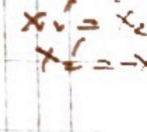
Απ.

Έστω $x_0\in K \Rightarrow \omega(x_0)\neq\emptyset$, $\omega(x_0)\subset K$.

Έστω ότι $\omega(x_0)\cap\{f=0\}=\emptyset$. Τότε $\omega(x_0)=\gamma$.

Αν τώρα $x_0\notin\gamma \Rightarrow \lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,x_0),\gamma)=0$, και άρα γ οριακός κύκλος.

Είναι όμως δυνατόν η γ) (Π.χ. $x_1'=x_2$, $x_2'=-x_1 \Leftrightarrow x_1''+x_1=0$



$\square$

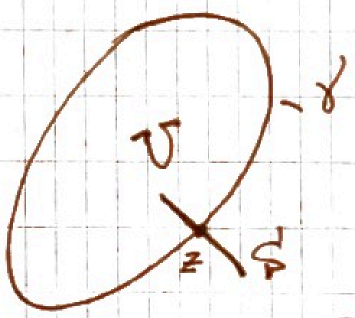
Πρόταση 2

Έστω γ κλειστή τροχιά και έστω ότι το $x' = f(x)$ ορίζεται και εντός της ανοικτού χωρίου U που περικλείεται από την γ. Τότε

ή το U περιέχει σημείο ισορροπίας

ή το U περιέχει οριακό κύκλο.

Απ



$D := U \cup \gamma$ = αναλλοίωτο, D συμπαγές. Έστω ότι το D δεν περιέχει σημείο ισορροπίας ή οριακό κύκλο. Θεωρώντας ένα $\xi \in U$, $\exists\, \omega(\xi) \subset D$, και από Poincaré - Bendixson Θ1 $\Rightarrow$ $\gamma = \omega(\xi)$ αναγκαστικά. Εφόσον $\xi \notin \gamma$ έπεται ότι η γ είναι οριακός κύκλος, $\boxed{\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t,\xi), \gamma) = 0 \quad (1)}$

Ομοίως επιχειρηματολογώντας με το $\alpha(\xi)$, και καταλήγουμε στο ότι $\boxed{\lim_{t \to -\infty} d(\varphi(t,\xi), \gamma) = 0. \quad (2)}$ Θεωρώντας μία διατομή Σ στο $z \in \gamma$, λέμε ότι (1)+(2) δεν συμβιβάζονται με την Αρχή Μονοτονίας (Λήμμα 1 βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 18).

∎

Θεώρημα 3

Έστω γ κλειστή τροχιά που είναι το σύνορο ανοικτού U. Τότε αναγκαστικά το U περιέχει σημείο ισορροπίας.

Απ

Με εις άτοπον απαγωγή. $\boxed{\text{Έστω } U \text{ (ανοικτό) δεν περιέχει σημεία ισορροπίας.}}$

Περίπτωση (i)

Έστω ότι η U περιέχει πεπερασμένο αριθμό κλειστών τροχιών (από Πρόταση 2 αναγκαστικά περιέχει οριακούς κύκλους).
Επιλέγουμε μια κλειστή τροχιά, ας πούμε αυτήν (ή αυτές) που περικλείουν το μικρότερο εμβαδό. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2 καταλήγουμε ότι η γ περιέχει στο εσωτερικό άλλη κλειστή τροχιά, όπερ άτοπο.

Περίπτωση (ii)

Έστω ότι η U περιέχει άπειρο αριθμό κλειστών τροχιών.

- Πρώτον θεωρούμε την περίπτωση που $\xi_n \to \xi$ και $\xi_n \in \gamma_n$, κλειστή τροχιά. Τότε αναγκαστικά $\xi \in$ κλειστή τροχιά $\hat{\gamma}$, διότι αν όχι, τότε το $\omega(\xi)$ θα είναι οριακός κύκλος (Θ 1), που αντίκειται με το ότι $\xi_n \in \gamma_n$ (αδύνατο κλειστές τροχιές συσσωρεύονται κοντά σε οριακούς κύκλους)

Έστω U_n εντός γ_n, και έστω

(1) $\inf \text{Εμ}(U_n) = \nu \geq 0 \quad - \quad \nu_n = \text{Εμ}(U_n)$

(2) $\nu_n \to \nu$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\xi_n \in \gamma_n$, $\xi_n \to \xi \in U$
($\partial U = \gamma$, $\xi \in \gamma$ αδύνατο διότι $\nu_n \to \nu < E\mu(U)$)
Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $\xi \in \beta$ = κλειστή τροχιά, β περικλείει περιοχή εμβαδού ν. Υποθέσαμε ότι έχουμε υπόθεση ότι $\nexists$ σημείο ισορροπίας στο U. Το εμβαδό $\nu \neq 0$. Από Πρόταση 2 αναγκαστικά περιέχει το χωρίο εντός της β οριακό κύκλο.
Αυτό αντίκειται στο ότι κλειστές τροχιές γ_n συγκλίνουν στην β

□

Ορ

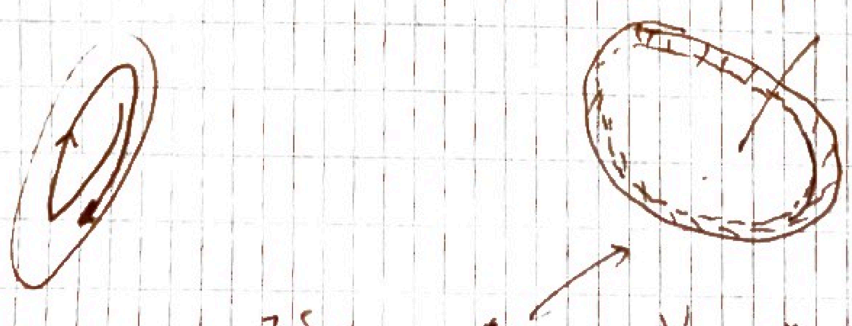
(*) $x' = f(x)$, Η ολοκλήρωμα κίνησης της (*) $f: \ldots \to \mathbb{R}$
είναι μια C^1 συνάρτηση $H: V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^2$, που δεν μεταβάλλεται κατά μήκος των λύσεων της (*).

Θεώρημα 4

Έστω Η ολοκλήρωμα κίνησης της (*). Αν η Η δεν είναι σταθερή σε ανοικτά σύνολα, τότε η (*) δεν έχει

Απ

Έστω ότι $\exists$ οριακός κύκλος γ. Τότε $H|_{\gamma} = c_0$.
Έστω τώρα $\xi \notin \gamma$, $\varphi(\xi,t) \to \gamma$.
Αναγκαστικά $H|_{\{\varphi(\xi,t) \mid t \geq 0\}} = c_0$ (λόγω συνέχειας)



Παρατηρούμε ότι $\exists$ δακτύλιος Δ τ.ω. $\forall \xi \in \Delta$, $H(\xi) = c_0$. Άτοπο.

□