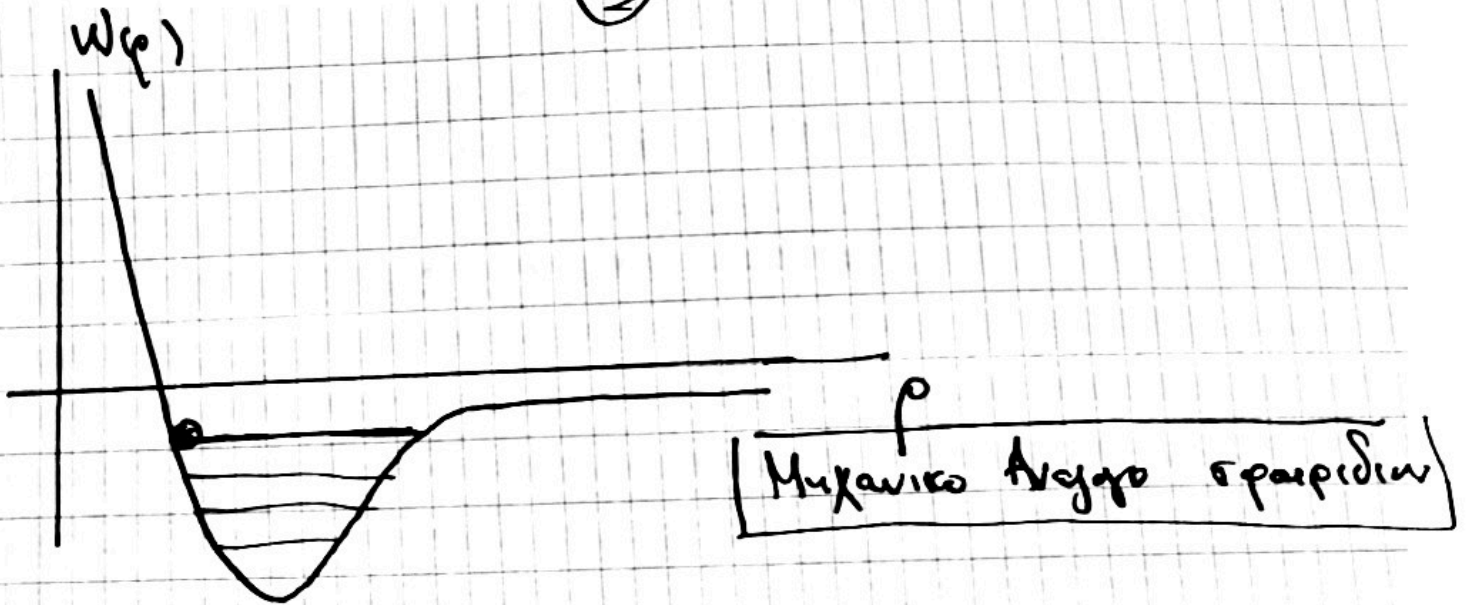


②



$$\frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + W(\rho) = \mathcal{E} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 - \frac{K}{\rho} + \frac{M^2}{2\rho^2} = \mathcal{E} \right]$$

④ $\left[\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{2 \left(\mathcal{E} + \frac{K}{\rho} - \frac{M^2}{2\rho^2} \right)} \right] \quad \mathbb{R}^1 !$

Μετ ενδιαφέρει η $\rho = \rho(\theta)$ - Απεριόγη Χρσ.
(τροχία)
γέωμετρικ.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} =$$

⑤ $= \frac{d\rho}{d\theta} \frac{M}{\rho^2}$

Είδηση νέας εξισώσεων μεταβλητών

⑥ $u = \frac{1}{\rho}$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \stackrel{⑤}{=} - \frac{d\rho}{dt} \frac{1}{M}$$

③

$$\frac{du}{d\theta} \stackrel{④}{=} -\frac{1}{M} \sqrt{2 \left(\varepsilon + \frac{K}{p} - \frac{M^2}{2p^2} \right)}$$

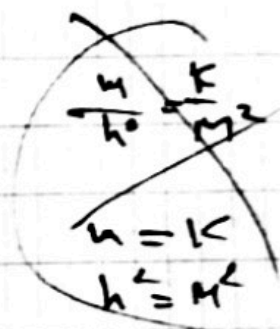
$$= -\frac{1}{M} \sqrt{2 \left(\varepsilon + Ku - \frac{M^2}{2} u^2 \right)}$$

\Rightarrow

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2}{M^2} \left(\varepsilon + Ku \right)$$

Διαφορικός

$$\textcircled{7} \quad \frac{du}{d\theta^2} + u = \frac{K}{M^2} \quad \text{Τριγωνική!}$$



Γενική Λύση

$$\textcircled{8} \quad u = \frac{K}{M^2} + C \cos(\theta + \theta_0), \quad C, \theta_0 \text{ σταθερές}$$

Από ⑧ αντικαθιστούμε στην ⑦

$$\textcircled{9} \quad C = \pm \frac{1}{M^2} \left(2KM^2\varepsilon + K^2 \right)^{1/2}$$

Πίσω στην ⑧

$$u = \frac{K}{M^2} \left[1 \pm \left(1 + 2 \frac{\varepsilon M^2}{K} \right)^{1/2} \cos(\theta + \varphi) \right]$$

Άλλα σκεφτόμαστε $\theta \rightarrow \theta + \varphi$, \pm δεν χρειάζεται
 ($\cos(\theta + \varphi + \pi) = -\cos(\theta + \varphi)$)

(4)

(10)
$$u = \frac{K}{M^2} \left[1 + \left(1 + 2 \frac{\Sigma M^2}{K} \right) \cos \theta \right]$$

(11)
$$u = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \theta), \quad u = \frac{1}{r}$$

Ανάπτυξη ζωφεταιρα - Κωνικες τφτες, $r = r(\theta)$

$\epsilon = \epsilon$ εκκενρικωτης

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

$\epsilon > 1, \epsilon = 1, \epsilon < 1$

↑ υπερβολη ↑ παραβολη ↑ ελλειψη (ορολογια!)
Ιστροικη προσηση

$$\epsilon = 1 + 2 \frac{\Sigma M^2}{K}$$

$\epsilon > 0, \epsilon = 0, \epsilon < 0$

↑ νοση. σεραι. ελλειψη.

Η περιπτωση των οφαντων

$$u > 0 \Rightarrow \left(1 + 2 \frac{\Sigma M^2}{K} \right) \cos \theta > -1$$

Η περιοδοικη = $\theta(t) \Rightarrow \theta = \pi$ για $t = t^*$

$$\Rightarrow 1 + 2 \frac{\epsilon M^2}{K} < 1$$

\Rightarrow εγγειση ! 1^{ος} νόμος Kepler

Άσκηση 1

Κάνουμε χρήση των 2^{ος} νόμου του Kepler,

των $\frac{1}{2} \theta' r^2 = M$, και των εμβαδών που

εγγείων δώστε των 3^ο νόμο του Kepler.

Χαμίζτωνα # Συστήματα στο Εμπέδο

(AK 2^ο εκδ. § 1.9.2)

Def : $H(x,y) \in C^2$ - Χαμίζτωνα.

$$\textcircled{2} \quad \left| \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) & , & \frac{dy}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{aligned} \right|$$

Διατύπωση

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = H_x x' + H_y y' = 0$$

$$\therefore \text{Τρακτα } (x(t), y(t)) \in H_c = \{ (x,y) \mid H=c \}$$

Παρατηρήσεις

Το ② είναι Χαμιλιτόνιο:

$$H(v, p) = \frac{1}{2} v^2 + W(p)$$

$$\begin{cases} p' = v \\ v' = -\frac{d}{dp} W(p) \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = v, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = W'(p)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial H}{\partial v} \end{array} \right]$$

H = μηχανική ενέργεια

#