ΔΙΑΛΕΞΗ 20

Παρατηρησεις επι του Poincaré–Bendixson $\boxed{x' = f(x)}$, $f \in C^1(U)$, $f : U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$

1) Το Θεωρημα 1 (ΔΙΑΛΕΞΗ 18, σ(3)) δειχνει οτι αν $\omega(x_0) \neq \emptyset$, συμπαγες, τοτε κατω απο την υποθεση

$$(*) \quad \omega(x_0) \cap \{x \mid f(x) = 0\} = \emptyset$$

εχουμε δυο δυνατοτητες

(α) $x_0 \in \omega(x_0) = \gamma =$ κλειστη τροχια $= \{p(t) \mid 0 \le t \le T,\ T > 0\}$, $p(0) = p(T)$

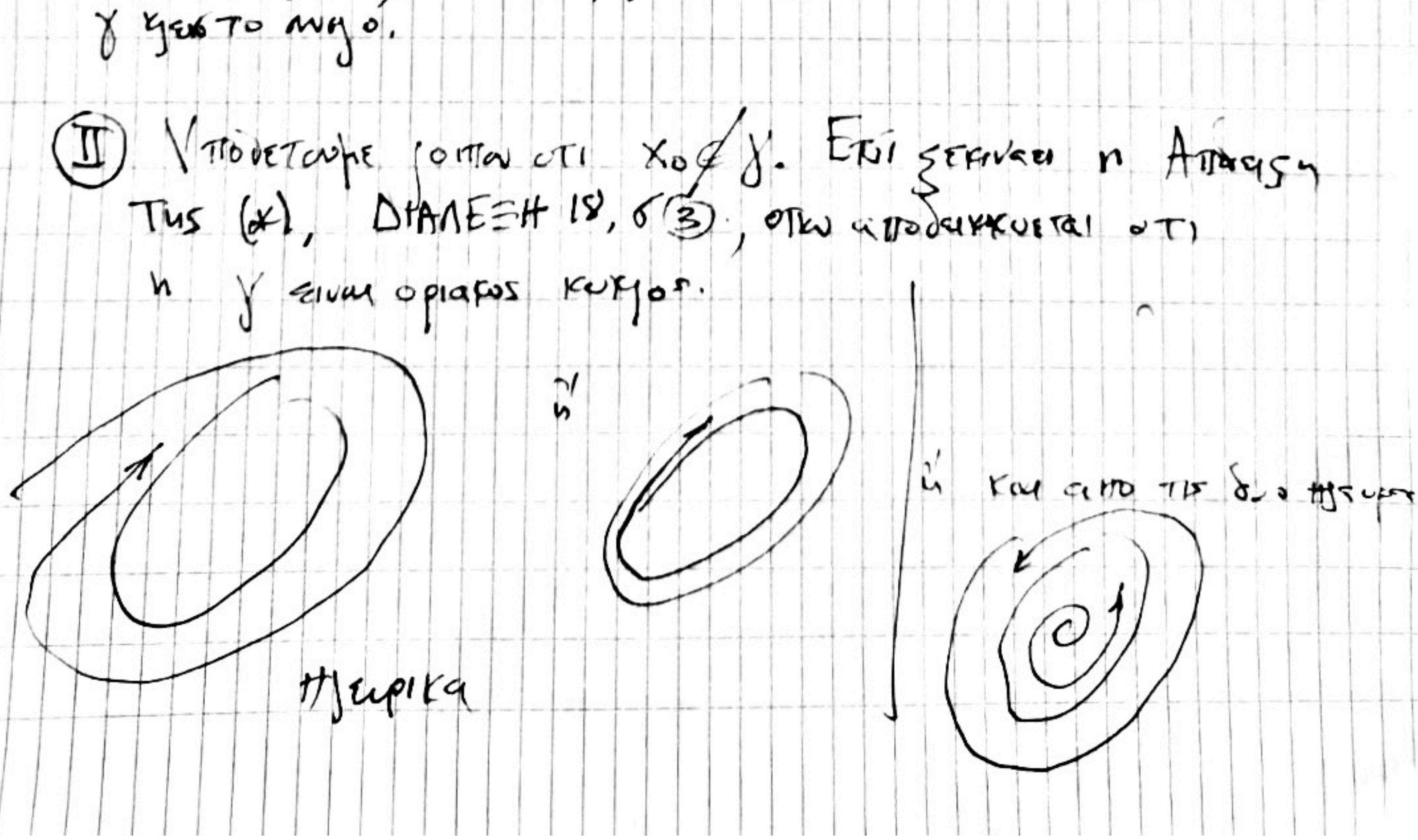
(β) $x_0 \notin \omega(x_0) = \gamma =$ οριακος κυκλος.

Υπενθυμιζουμε οτι η Αποδειξη παρεχεται ως εξης:

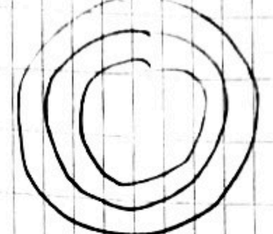
(I) Κατω απο την υποθεση (*) πρωτα δειχναμε οτι το $\omega(x_0)$ περιεχει κλειστη τροχια $\gamma \subset \omega(x_0)$.

Στην συνεχεια θελουμε να δειξουμε οτι $\gamma = \omega(x_0)$.
Αν $x_0 \in \gamma$ τοτε προφανως $\gamma = \omega(x_0)$, διοτι $\varphi(t, x_0) \in \gamma$ και γ κλειστο συνολο.

(II) Υποθετουμε λοιπον οτι $x_0 \notin \gamma$. Ετσι ξεκινα η Αποδειξη της (*), ΔΙΑΛΕΞΗ 18, σ(3), οπου αποδεικνυεται οτι η γ ειναι οριακος κυκλος.



Προφανώς $\exists$ κλειστές τροχιές της $x' = f(x)$ που <u>δεν</u> είναι οριακοί κύκλοι,
Π.χ. $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$



2) Η Πρόταση 2 στην Διάλεξη 19 σ(2) λέει ότι:

Έστω γ κλειστή τροχιά και έστω ότι το $x' = f(x)$ ορίζεται εντός του ανοικτού χωρίου U που περιβάλλεται από την γ. Τότε

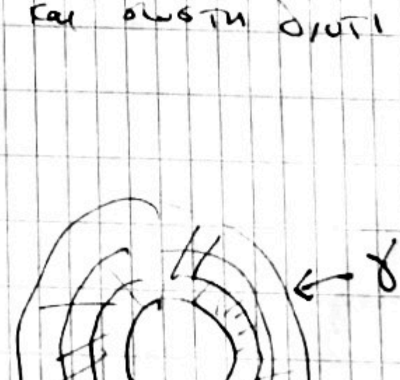
ή το U περιέχει σημείο ισορροπίας

ή το U περιέχει οριακό κύκλο.

Η Απόδειξη όμως (Βλέπε Proposition 2, Hirsch-Smale, σ251) δεν χρησιμοποιεί καθόλου ότι το U είναι απλά συνεκτικό, οπότε δεν είναι δυνατόν να είναι και σωστή διότι έχουμε το αντιπαράδειγμα του

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$$

στο δακτύλιο Δ



Η απόδειξη στην σ.(2), Διάλεξη 19 αποδεικνύει: ότι η U περιέχει
ή σημείο ισορροπίας
ή κλειστή τροχιά

Επανάληψη Απόδειξης Πρότασης 2

λόγω του ότι $\omega(\xi) \cap \{x \mid f(x)=0\} = \emptyset$

Έστω ότι το U δεν περιέχει ούτε σημείο ισορροπίας, ούτε κλειστή τροχιά. $D := U \cup \gamma$ = αναλλοίωτο, συμπαγές. Θεωρούμε $\xi \in U$. Έχουμε $\omega(\xi) \subset D$. Από Poincaré-Bendixson $\exists\ \hat{\gamma}$ κλειστή, $\hat{\gamma} \subset \omega(\xi)$. Αν $\hat{\gamma} \neq \gamma$ αναγκαστικά $\hat{\gamma} \subset U$, και αυτό εξ υποθέσεως δεν είναι δυνατόν. Άρα $\hat{\gamma} \equiv \gamma$, $\omega(\xi) = \gamma$.
Εφόσον το $\xi \notin \gamma \Rightarrow \gamma$ οριακός κύκλος από μέσα:

Τελείως ανάλογα, με το ίδιο επιχείρημα $\alpha(\xi) = \gamma$.
Αυτό όμως δεν είναι δυνατόν λόγω του Λήμματος 1 της μονοτονίας ως προς διατομή. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Η απόδειξη της Πρότασης 2 είναι πλήρης.

□

Σημείωση

Το ~~Επόμενο~~ τοπολογικό Λήμμα είναι γενικά χρήσιμο. Αποδεικνύει τον δακτύλιο Δ.

Λήμμα (Ισχύει στο $\mathbb{R}^n$).

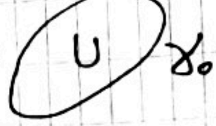
$E \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, συνεκτικό.

Τότε ισχύει ότι

∂E συνεκτικό αν και μόνο αν το E^c συνεκτικό.

Το προηγούμενο Λήμμα μαζί με την ασθενή διατύπωση του θεωρήματος του Jordan αποδεικνύει ότι το εσωτερικό είναι απλά συνεκτικό.
Αυτό βέβαια προκύπτει από το Jordan-Schoenflies θεώρημα ότι το εσωτερικό είναι τοπολογικός δίσκος.

3) Επανάληψη της Απόδειξης του Θεωρήματος 3

Θ3: γ κλειστή τροχιά $\Rightarrow$ U περιέχει σημείο ισορροπίας 

, $\gamma U = \gamma_0$

Απ.

Με εις άτοπον απαγωγή: U = ανοικτό

Έστω ότι το U δεν περιέχει σημεία ισορροπίας.

Από την Πρόταση 2 προκύπτει ότι περιέχει τουλάχιστον μία κλειστή τροχιά γ_1.

Περίπτωση (i)

Έστω ότι το U περιέχει πεπερασμένο αριθμό κλειστών τροχιών, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η γ_n περιέχει το ελάχιστο εμβαδόν α_n. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2 στην γ_n παίρνουμε μια περιοδική $\hat{\gamma}$ που περιέχεται εντός του χωρίου που περικλείει η γ_n, που συγκρούεται με το ότι το α_n ήταν ελάχιστο.

Περίπτωση (ii)

Έστω τώρα ότι το U περιέχει άπειρο αριθμό κλειστών τροχιών $\{\gamma_\alpha\}$

Έστω $\{E_\alpha\}$ τα εμβαδά των χωρίων που περιέχονται εντός των γ_α, και έστω

$$E = \inf_\alpha E_\alpha$$

Επιλέγουμε ακολουθία $\{\gamma_n\} \longleftrightarrow \{E_n\}$

$$(\gamma_n \longleftrightarrow E_n \longrightarrow E$$

Επιλέγουμε

$$\xi_n \in \gamma_n$$

Από συμπάγεια για υπακολουθία των $\{\xi_n\}$ που συμβολίζουμε πάλι με $\{\xi_n\}$ έχουμε

$$\xi_n \to \xi \quad , \; n \to +\infty$$

Ισχυρισμος 1 : Το ξ ανοικει σε κλειστη τροχια $\hat{\gamma}$ ($T \geq 0$, περιοδ...

Αν οχι τοτε $\xi \notin \omega(\xi) = p$, οριακος κυκλος

$$d(\varphi(t,\xi), p) \longrightarrow 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{Poincaré-Bendixson} \\ \Theta 1\end{array}\right)$$

Γνωριζουμε οτι το χωριο ελξης της p ειναι ανοικτο συνολο:

$$A = \{ y \mid p = \omega(y) \} - p \quad \text{ανοικτο.}$$

Εστω $\varphi(t^*, \xi) \in A$. Τοτε για $n \geq n_0 >> 1$

$$\varphi(t^*, \xi_{n_0}) \in A$$

Επεται οτι

$$\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t, \xi_{n_0}), p) = 0,$$

ατοπο διοτι $t \to \varphi(t, \xi_{n_0})$ περιοδικη.

Ισχυρισμος 2

Εστω E το εμβαδον εντος της $\hat{\gamma}$.

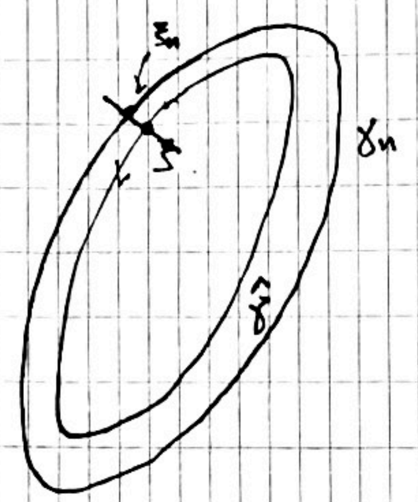
$$\hat{E} = E$$

Υπενθυμιζαμε οτι

$y \in \omega(x) \Rightarrow$ τροχια $\varphi(t,y)$ τεμνει οποιαδηποτε διατομη το πολυ σε ενα σημειο.

Αν γ η κλειστη τροχια τοτε $x \in \omega(x)$, για $x \in \gamma$.

Αρα καθε περιοδικη τροχια τεμνει την διατομη S το πολυ μια φορα.



Προκύπτει λοιπόν ο Ισχυρισμός 2.

<u>Coda</u>

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2 στην $\hat{\gamma}$ και παίρνουμε μία κλειστή γ^* εντός. Άτοπο διότι περιέχει εμβαδό μικρότερο το E.

Η Απόδειξη είναι Πλήρης.

$\square$