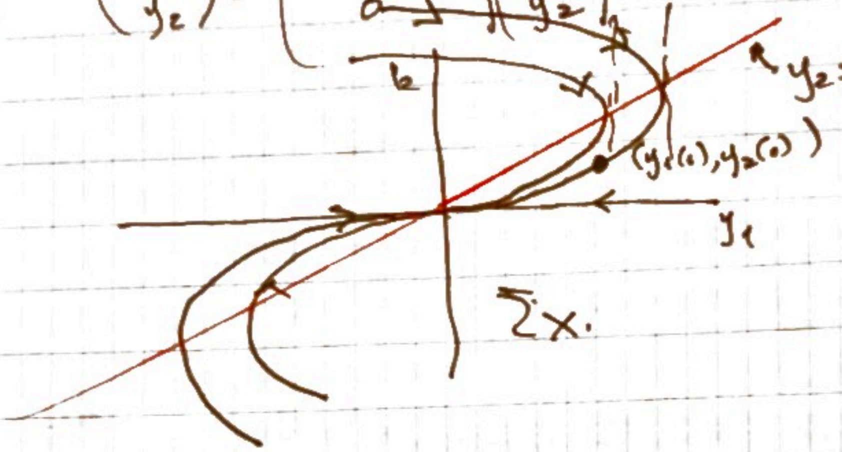
Διάλεξη 4

A) Εξηγήσεις – Σχόλια στην Διάλεξη 3

1) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$



Δύο τρόποι: (i) Επιλύοντας το σύστημα

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2 , \quad y_2' = \lambda y_2 \Rightarrow y_2(t) = y_2(0) e^{\lambda t}$$

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2(0) e^{\lambda t} \Longrightarrow y_1(t) = e^{\lambda t} y_1(0) + e^{\lambda t} y_2(0)\, t$$

$$\boxed{y_2(t) = \frac{1}{\frac{y_1(0)}{y_2(0)} + t} y_1(t)} \Longrightarrow \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \to 0 , \; t \to +\infty$$

Έστω $y_1(0) \geq 0$, $y_2(0) \geq 0$, όπως στο Σχ.

Για $t \to -\infty$ έχουμε $y_1(t) \to -\infty$

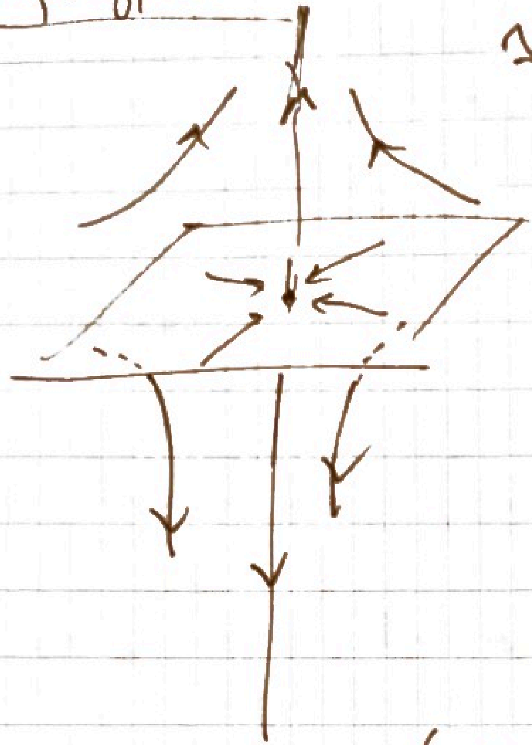
και $\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)} \to 0$.

(ii) Απαλείφοντας τον χρόνο

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda y_2}{\lambda y_1 + y_2} = \infty \text{ για } y_2 = -\lambda y_1 .$$

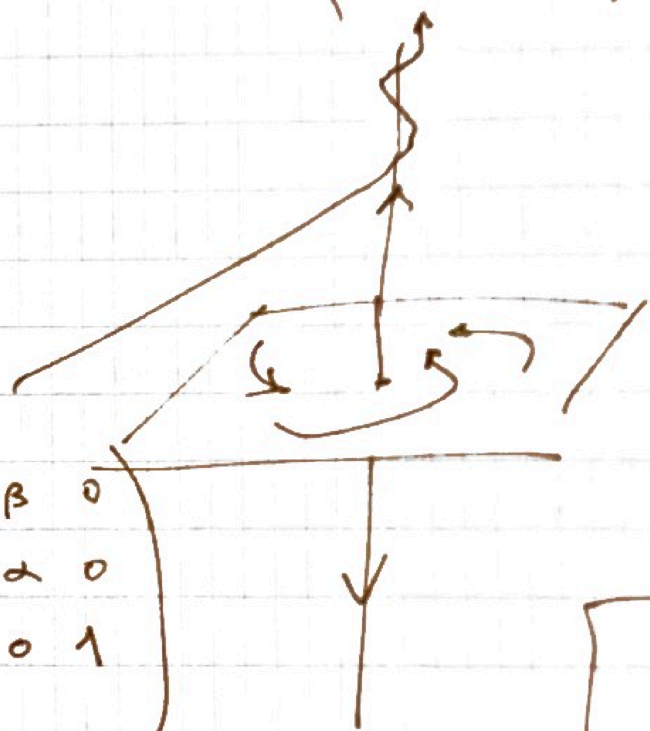
2) $\mathbb{R}^n$ – χώρος φάσης

Παραδείγματα



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

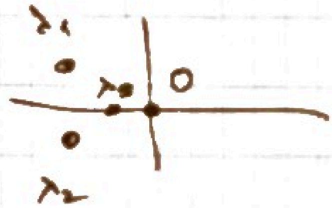


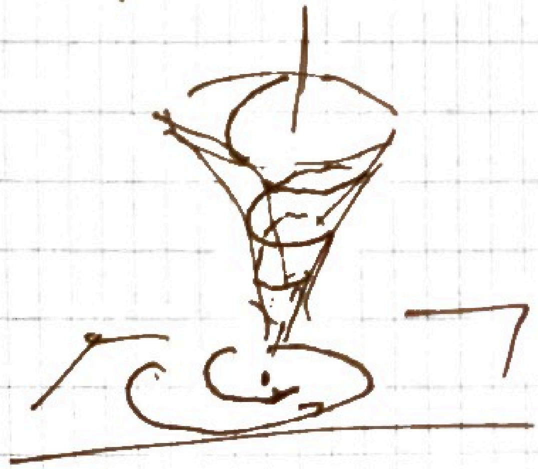
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

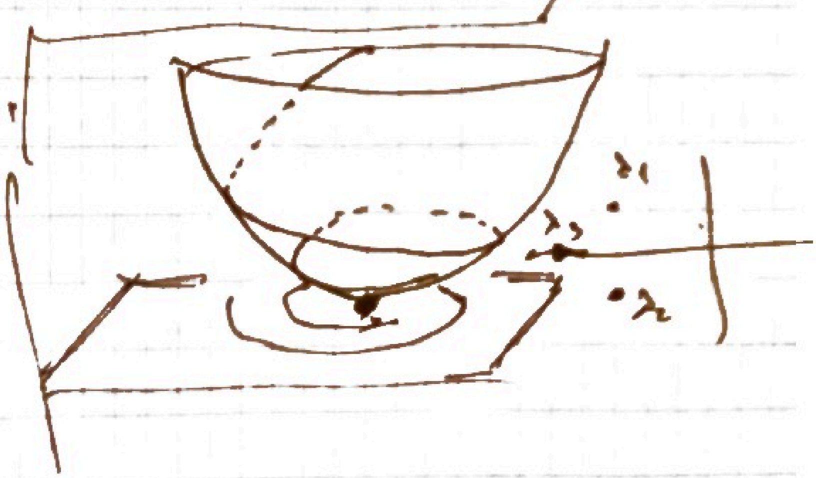
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$\lambda_3 < 0$



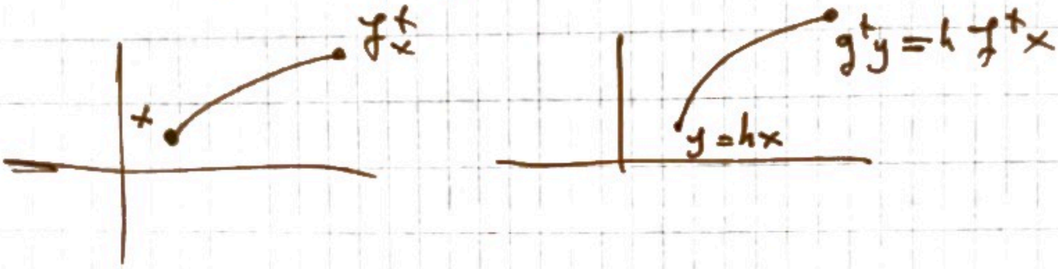




Β) Περί Ταξινόμησης Γραμμικών Συστημάτων στο επίπεδο.

Δυο ροές $\{f^t\}, \{g^t\}$ ισοδύναμες αν $\exists\ h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

1-1, επί, που απεικονίζει την f^t στην g^t:



Ορισμός Ροής (βλ. 6.525, Κεφάλαιο 10, Α-Καλλιγερόπουλος)

$f^t = f(t,x)$

α) $f^t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, συνεχής ως προς x, t

β) $f^t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 1-1, αντιστρέψιμη μέσω f^{-t}

γ) $f^0 x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

δ) $f^{t+\tau} x = f^t \circ f^\tau x, \quad \forall \tau, t \in \mathbb{R}$

1) Γραμμική Ισοδυναμία: $x' = Ax$, $y' = By$ (Αλγεβρικά)
$\exists\ h$ γραμμικός ισομορφισμός

2) Διαφορίσιμη Ισοδυναμία αν h diffeomorphism (Διαφορικά)

3) Τοπολογική Ισοδυναμία αν h homeomorphism
(συνεχής, 1-1, επί, συνεχώς αντιστρέψιμος) (Τοπολογικά)

Παρατηρήσεις (Βλέπε Arnold σσ. 197–20) [Μίνι Project]

1) Γραμμική $\Rightarrow$ Διαφορίσιμη $\Rightarrow$ Τοπολογική

2) Έστω $x'=Ax$, $y'=By$, με απλές ιδιοτιμές οι A, B
(αλγεβρική πολλαπλότητα = γεωμετρική πολλαπλότητα
ισοδύναμα $\nexists$ Jordan blocks).
Τότε
$$e^{At} \sim e^{Bt} \quad \text{γραμμικά} \iff A, B \text{ ίδιες ιδιοτιμές}$$

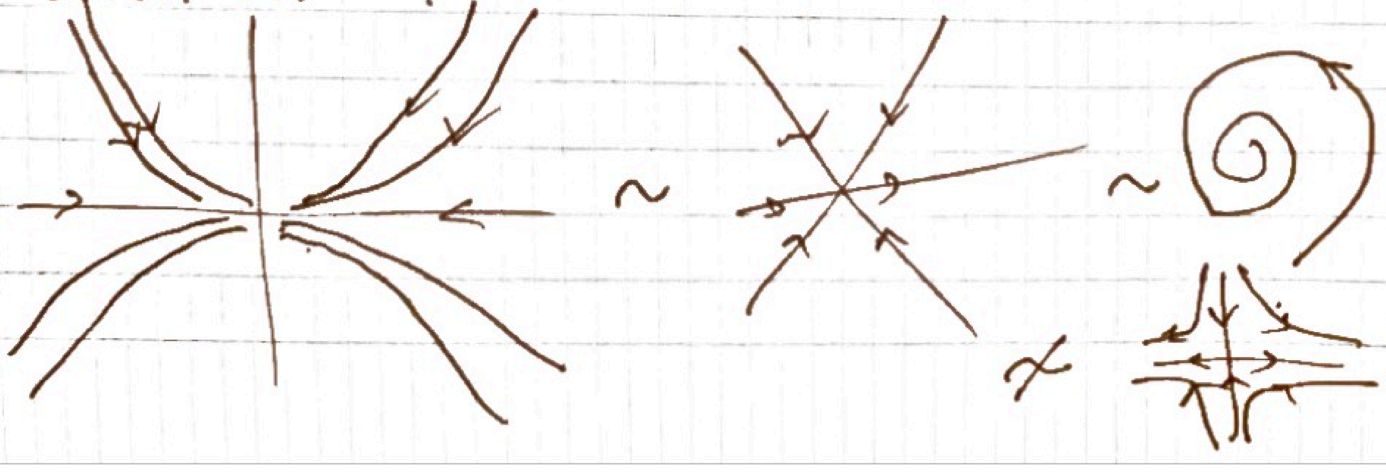
3) $x'=Ax$, $y'=By$ ισοδύναμα γραμμικά αν και μόνο αν διαφορίσιμα ισοδύναμα.

4) $x'=Ax$, $y'=By$
Έστω A, B απλές ιδιοτιμές, και $Re\,\lambda(A)\neq 0$, $Re\,\lambda(B)\neq 0$.
Έστω $m_+(A) = \#$ ιδιοτιμών της A με $Re\,\lambda>0$
Ομοίως $m_-(A) = \#$ —"— $Re\,\lambda<0$

Θεώρημα

$$e^{At} \sim e^{Bt} \quad \text{τοπολογικά} \iff \begin{array}{l} m_+(A)=m_+(B) \\ m_-(A)=m_-(B). \end{array}$$

Έπεται ότι :



Παράδειγμα 10.8

$$y' = Ay \ , \ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ , \lambda_1, \lambda_2 \text{ ιδιοτιμές}$$

$$\lambda_{max} = \max_{i=1,2} Re\, \lambda_i$$

Έστω $\sigma > \lambda_{max}$. Τότε ισχύει η εκτίμηση

$$\|e^{At} y_0\| \leq K e^{\sigma t} \|y_0\| \ , \ t > 0$$

$K = K(\sigma)$. (βλ. σ 493-494 Α-Κ, Κεφ. 10)

#