Διαλεξη 5

Προταση (10.1.6, A–K.)

$$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$\lambda_{max} := \max \operatorname{Re} \lambda_i$

$\forall\ \sigma > \lambda_{max}\ \ \exists\ k = k(\sigma)$ τ.ω.

(1) $$\|e^{At}\| \leq k e^{\sigma t}, \quad t \geq 0.$$

$\| \ \|$ Ευκλειδεια νορμα

$y(0) = y_0$
$\Rightarrow$
$y(t) = e^{At} y_0$

Σημ : $e^{A} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ βλ $\boxed{6.40}$ Ασκηση, σ. 554
2η εκδοση A–K.

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \qquad \|A\|$$

Εναλλακτικος Ορ : $e^{A} := \lim_{m \to +\infty} \left(I + \frac{A}{m} \right)^m$

(Arnol'd, p 165)

Παρατηρηση 1 : Η (1) εν γενει δεν ισχυει για $\sigma = \lambda_{max}$

Αντιπαραδειγμα

(2) $$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \qquad \lambda_{max} = 0.$$

$y_1' = y_2 \Rightarrow y_1' = c \Rightarrow y_1(t) = ct, \ y_2(t) = c$

$y_2' = 0 \Rightarrow y_2 = c$

Αν η (1) ισχυε για $\sigma = 0 \Rightarrow$ όλες οι λυσεις φραγ.

$\otimes$

Παρατήρηση 2 : Αν $\lambda_{max} < 0$ τότε το $x=0$ (σημείο ισορροπίας) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (ολικά):

$$\|e^{At}\| \le K e^{(\lambda_{max}+\varepsilon)t}, \quad \lambda_{max}+\varepsilon < 0.$$

Απ

Βήμα 1 : Έστω A κανονικής μορφής

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(i) $$e^{At} = \sum \frac{A^\nu t^\nu}{\nu!} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^\nu t^\nu}{\nu!} & 0 \\ 0 & \sum \frac{\lambda_2^\nu t^\nu}{\nu!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$A^\nu = \begin{pmatrix} \lambda_1^\nu & 0 \\ 0 & \lambda_2^\nu \end{pmatrix}$$

$$\|e^{At}\| = \left(e^{2\lambda_1 t} + e^{2\lambda_2 t}\right)^{1/2} \le \sqrt{2}\, e^{\lambda_{max} t}$$

συστολή διαστολή

στροφή

(ii) $$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = C + D$$

στροφή

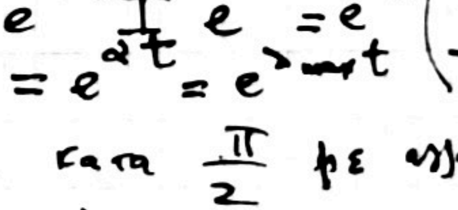
$CD = DC$

$$e^{At} = e^{(C+D)t} = e^{Ct} e^{Dt} = e^{\alpha t} I e^{Dt} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

$$\|e^{At}\| = e^{\alpha t} = e^{\lambda_{max} t}$$

Η D είναι στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$ με αύξηση μήκους

$$\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \beta$$



$$e^D = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

iii) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C + D$

$$e^{At} = e^{Ct} e^{Dt} = e^{\lambda t} I \, e^{Dt}$$

$$= e^{\lambda t} I \left[I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\| e^{At} \| = e^{\lambda t} \left[2 + t^2 \right]^{1/2} = e^{\sigma t} e^{(\lambda - \sigma) t} \left[2 + t^2 \right]$$

$$\le e^{\sigma t} \left[\max_t e^{(\lambda - \sigma) t} (2 + t^2) \right]$$

αρνητικό εκθετικό

Βήμα 2 : Γενικός Πίνακας A

$$At = P^{-1} J_t P.$$

$$e^{At} = \sum \frac{(P^{-1} J_t P)^n}{n!}$$

$$(P^{-1} J \cancel{P})(\cancel{P^{-1}} J \cancel{P}) \dots (\cancel{P^{-1}} J P) = P^{-1} J_t^n P$$

$$\boxed{P^{-1} e^{Jt} P}$$

$$\| e^{At} \| = \| P^{-1} e^{Jt} P \| \le \| P^{-1} \| \, \| e^{Jt} \| \, \| P \|$$

Προκύπτει άμεσα από Βήμα 1.

∎