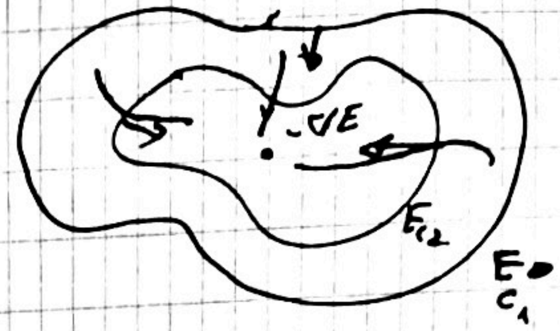
Διάλεξη 6

Α-Κ §10.6



Ⅰ Συστήματα Κλίσης

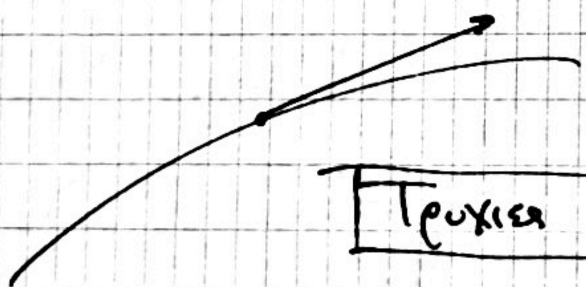
$E(x,y)$ C^2

$$(1)\ \begin{cases} x' = -\dfrac{\partial E}{\partial x} \\[2mm] y' = -\dfrac{\partial E}{\partial y} \end{cases} = -\nabla E(x,y)$$

$$(2)\ \frac{d}{dt} E(x(t),y(t)) = \nabla E(x(t),y(t)) \cdot (x',y') \overset{(1)}{=} -|\nabla E|^2 \le 0.$$

$E_c = \{ (x,y) \mid E(x,y) = c \}$ = Καμπύλη Στάθμης.

$\nabla E(x,y) \perp E_c$, $(x,y) \in E_c$, ∇E κατευθύνεται προς αυξουσες τιμές της E



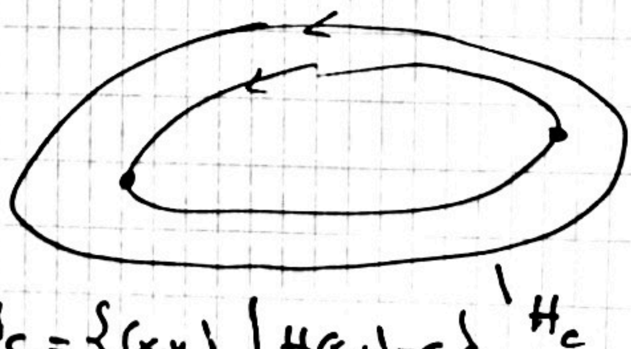
$c_1 > c_2$

$$\boxed{\text{Τροχιές κάθετες στις καμπύλες στάθμης της } E}$$

Ⅱ Χαμιλτονιανά Συστήματα

$H(x,y)$, C^2, Hamiltonian

$$(3)\ \begin{cases} x' = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\[2mm] y' = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$



$H_c = \{ (x,y) \mid H(x,y) = c \}$

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y'$$

$$\overset{③}{=} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0$$

$\boxed{\text{Τροχιές περιέχονται σε καμπύλες στάθμης της } H}$

Γενικότερα

θέσεις, ταχύτητες

$H(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$

$$\boxed{\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0}$$

④
$$\begin{cases} x_i' = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}, & i = 1, \dots, n \\ y_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα 1</u> – Πρόβλημα n-σωμάτων

⑤
$$\begin{cases} x_i' = v_i \\ m_i v_i' = -\operatorname{grad} V(x) \end{cases}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\Delta_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\}, \quad i<j$$

$$V(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$$

$$\Delta = \bigcup \Delta_{ij}$$

$$V : \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathbb{R}$$

$$K(x, v) = \frac{1}{2} \sum m_i |v_i|^2$$

$$H(x, v) = V(x) + \frac{1}{2} \sum m_i |v_i|^2$$

⑤ ⇔ ⑥
$$\begin{cases} x_i' = \dfrac{\partial H}{\partial v_i} \\ y_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$\boxed{(\mathbb{R}^n \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^n}$$

Παράδειγμα 2 : Υποβιβασμένο Πρόβλημα 2 σωμάτων

$$(7)\quad \begin{cases} r' = v \\ v' = -\dfrac{K}{r^2} + \dfrac{M^2}{r^3} \end{cases}$$

$$H(r,v) = \frac{1}{2}v^2 + W(r) \quad , \quad W(r) = -\frac{K}{r} + \frac{M^2}{2r^2}$$

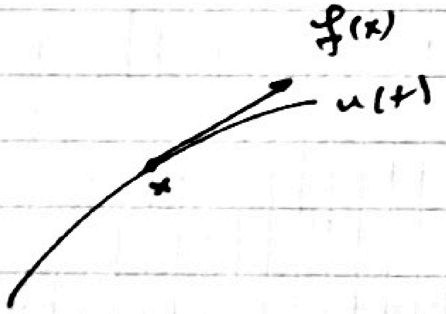
$$(7) \Leftrightarrow (8)\quad \begin{cases} r' = \dfrac{\partial H}{\partial v} \\ v' = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \end{cases}$$

Ορίζεται στο $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$

Επανάληψη Βασικής Θεωρίας

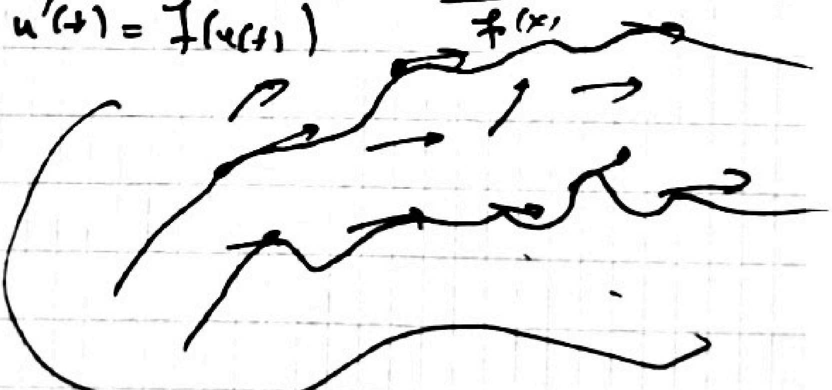
(ΑΚ Κεφάλαιο 2
ΑΚ Θεώρημα 10.6)

(1) $x' = f(x)$, $f: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό



$u'(t) = f(u(t))$

Διανυσματικό Πεδίο



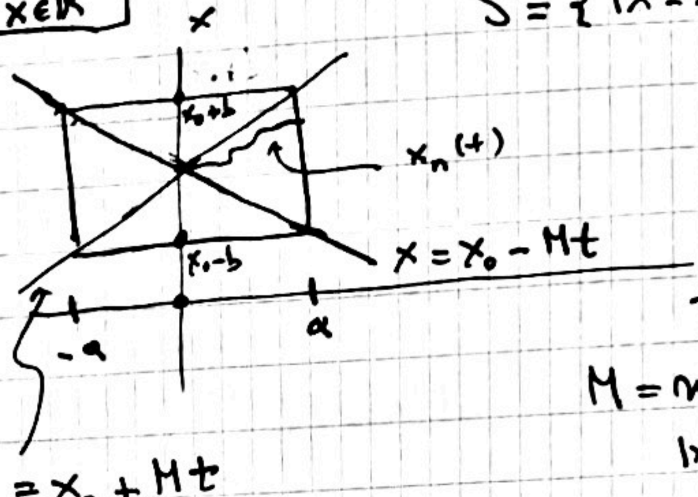
Θεώρημα (Picard-Lindelöf)

$f \in C^1(W)$, $x_0 \in W$.
$\exists\ \alpha > 0$, και μοναδική λύση της (1)
$x: (-\alpha,\alpha) \longrightarrow W$, $x(0) = x_0$

($f \in Lip$ τοπικά ο.κ.)

$\boxed{\text{Σχήμα για } x \in \mathbb{R}^1}$

$$S = \{|x - x_0| \le b\} \times [-a, a]$$



$$M = \max_{|x-x_0|\le b} |f(x)|$$

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

$$(2)\ \begin{cases} x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(s))\,ds & , n = 0, 1, \ldots \\ x_0(t) \equiv x_0 \end{cases}$$

ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΕΝΤΟΣ ΚΩΝΟΥ

(Επαγωγικά)

$$(3)\ \bullet\ |x_{j+1}(t) - x_0| \le M|t| \quad \boxed{|t| \le \alpha}$$

$$(4)\ \bullet\ |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \frac{ML^{n-1}|t|^n}{n!}, \quad |t| \le \alpha$$

$$(L)\ \ L = \max_{i,\ |x-x_0|\le b} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \qquad \text{(Lipschitz)}$$

(Επαγωγικά η Απόδειξη της (4))

$$\therefore\ \sum |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \frac{M}{L} \sum \frac{L^n\alpha^n}{n!} = \frac{M}{L}\left(e^{\alpha L} - 1\right)$$

$\therefore\ \{x_n(\cdot)\}\ \ |t| \le \alpha$ ομοιόμορφη σύγκλιση

$$x_n(t) \longrightarrow x(t)$$

Παίρνουμε όριο στην (2)

$$(5)\ \ x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds \qquad \text{(Ύπαρξη)}$$

Μοναδικότητα

(5) Έστω $\boxed{\alpha \le \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)}$

Έστω $y(t)$ μια 2η λύση:

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(y(s))\,ds$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds$$

$$Q := \max_{[-\alpha,\alpha]} |x(t)-y(t)| = |x(t_1)-y(t_1)|$$

$$Q = |x(t_1)-y(t_1)| \le \int_0^{t_1} |f(x(s))-f(y(s))|\,ds \overset{(L)}{\le} L\int_0^{t_1} |x(s)-y(s)|\,ds$$

$$\le L Q \alpha < Q \quad !$$

$$\therefore \quad x(t) \equiv y(t).$$

□

Παρατήρηση (Οι τροχιές δεν τέμνονται στον χώρο φάσεων)

Έστω $x(t), y(t)$ λύσεις της (1).

Έστω $\exists\, t = t_1, t_2$

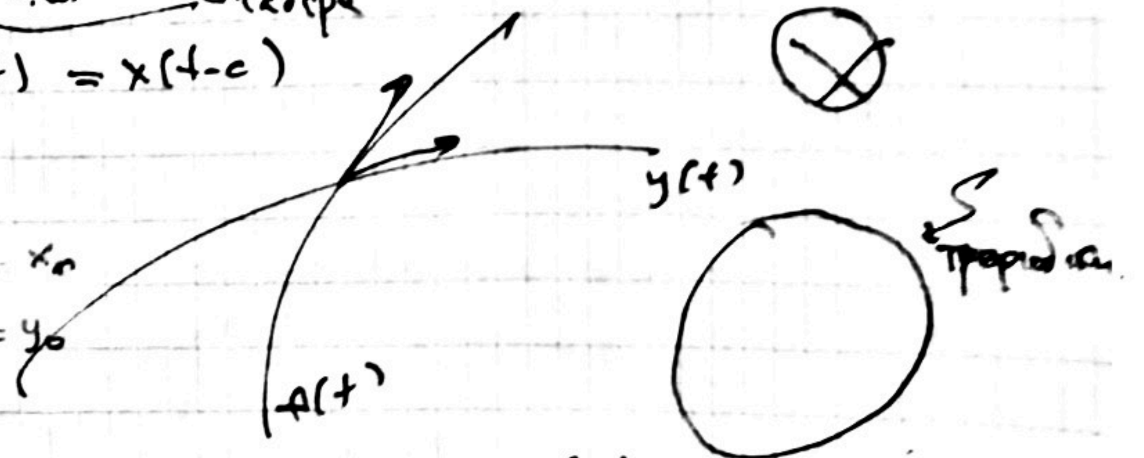
$$x(t_1) = y(t_2)$$

$\Rightarrow \exists\, \boxed{c}$ τ.ω. $\quad$ σταθερά

$$y(t) = x(t-c)$$

ⓧ

$y' = f(y)$, $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$



$x(T) = x(0) \Rightarrow x(t) = x(t+T) \;\; \forall t$

Απ

$\boxed{1}$. Εστω $k>0$ σταθερα, $x(t)$ λυση της (1)

Τοτε $z(t) = x(t-k)$ επισης λυση της (1):

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t-k)}{dt} = f(x(t-k)) = f(z(t))$$

$\boxed{2}$ Το Π.Α.Τ.

$$(7)\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ανεγεται στο (1) : $y(t) := x(t-t_0)$

$$(8)\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

$\boxed{3}$. Εστω $z(t) = \cancel{x}(t-(t_2-t_1))$

$$\begin{cases} z' = f(z) \\ z(t_2) = x(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

$\therefore$ Μοναδικοτητα $\Longrightarrow$ $z(t) \equiv y(t)$

$$\Longleftrightarrow x(t-(t_2-t_1)) \equiv y(t).$$

Παραμετρικα διαφορετικα, $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ ως καμπυλες (τροχια) ταυτιζονται.

Δυναμικο Συστημα

(α) $\varphi(t,\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχως ως προς t, x

(β) $\varphi(t,\cdot)$ 1-1, $\varphi(-t,\cdot)$ αντιστροφη

(γ) $\varphi(t, x_0) = x_0$ $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(δ) $\varphi(t+\tau, x_0) = \varphi(\tau, \varphi(t, x_0))$, $\forall$ t, τ, x_0.

Θεώρημα

$$(1)\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Έστω ότι (1) έχει λύσεις ορισμένες $(t \in \mathbb{R})$
και $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$
Τότε το

$$\varphi(t, x_0) := x(t)$$

είναι Δ.Σ.

#