Διαλεξη 7

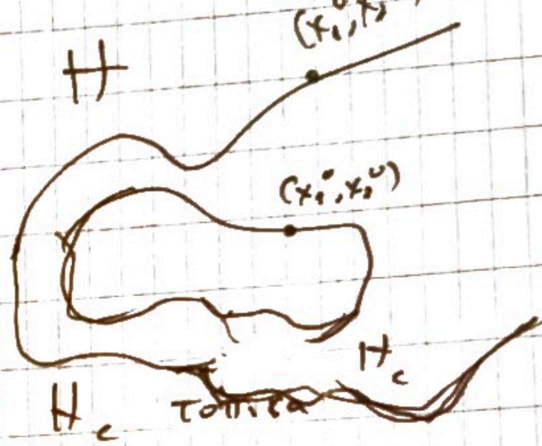
Εξισωση του Newton

$x''=f(x)$ $\qquad f\in C^1$

$$\boxed{\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=f(x_1)\end{cases}} \Rightarrow \quad x_1'=\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad x_2'=-\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

$T=\frac{1}{2}x_2^2$, $U=-\int_0^x f\,ds$, $H=T+U$, $H_c=\{(x_1,x_2)\mid H=c\}$

$H(x_1,x_2)=c$



$\boxed{\Sigma.\mathrm{I}.}$: $\quad \bar{x}_2=0, \; f(\bar{x}_1)=0 \iff \begin{cases} H_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0 \\ H_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0\end{cases}$

Προταση

Εστω $(x_1^0,x_2^0)\in H_c$, οχι Σ.Ι. $\Rightarrow$ H_c τοπικα $\underline{x_2=a(x_1)}$ ή $\underline{x_1=a(x_2)}$, a C^1 συναρτηση.

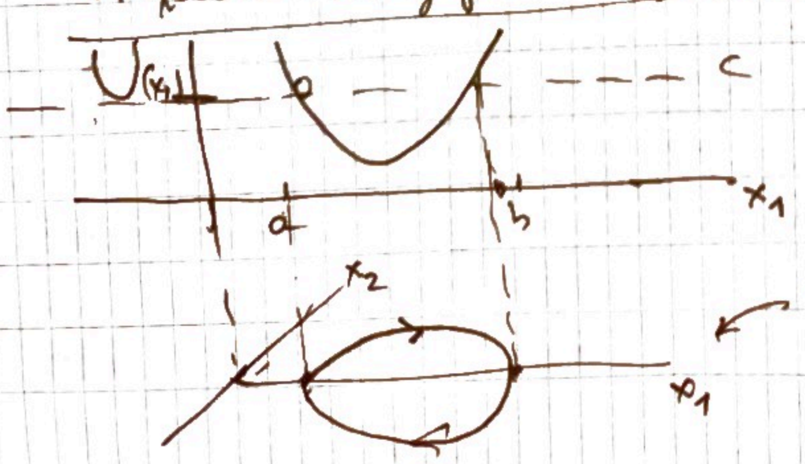
Απ

Εστω $\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\neq 0 \Rightarrow x_2=a(x_1)$, $x_2^0=a(x_1^0)$

τοπικα, απο Θ.Π.Σ.

□

Μηχανικο Αναλογο Σφαιριδιων



επ. φασης.

$\frac{1}{2}x_2^2+U(x_1)=c$

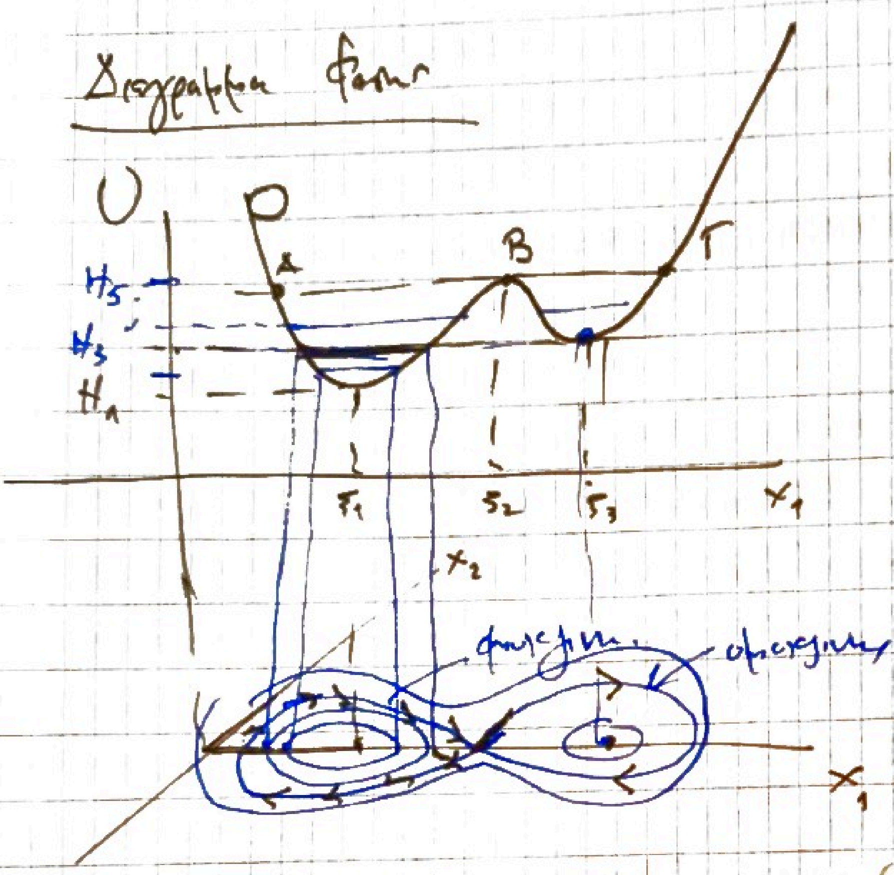
$\boxed{x_2\to -x_2}$

$|x_2|=\sqrt{2(c-U(x_1))}$.

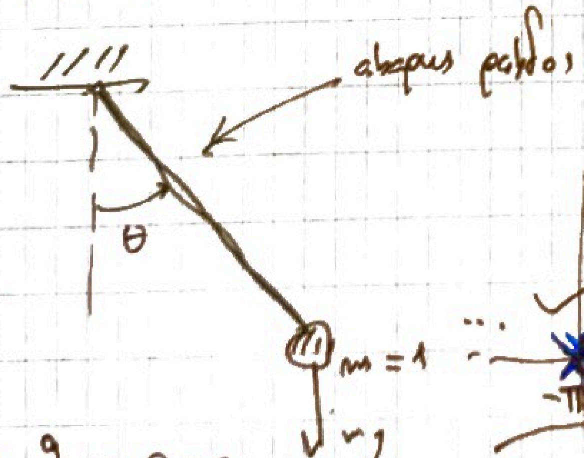
Ορ (κρίσιμη τιμή)

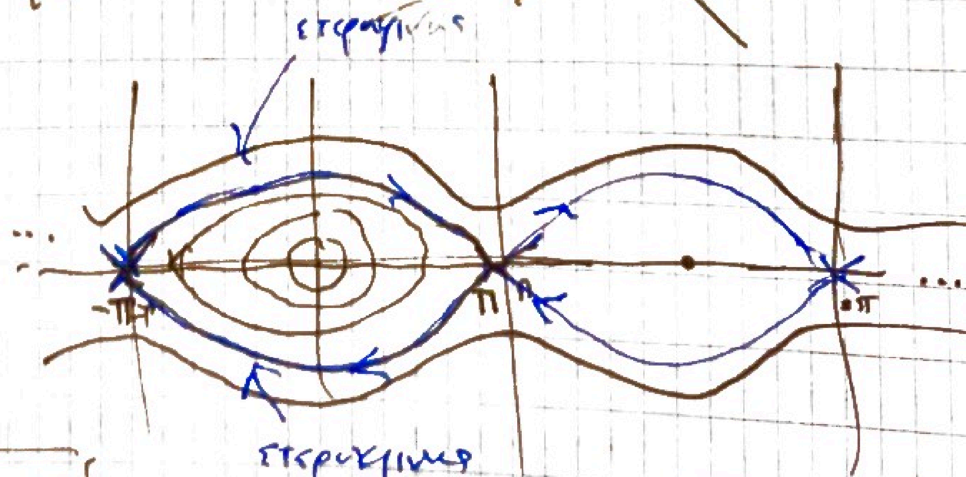
c κρίσιμη αν $c = U(\xi)$, $U'(\xi) = 0$.

Διάγραμμα φάσης



Εκκρεμές





$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

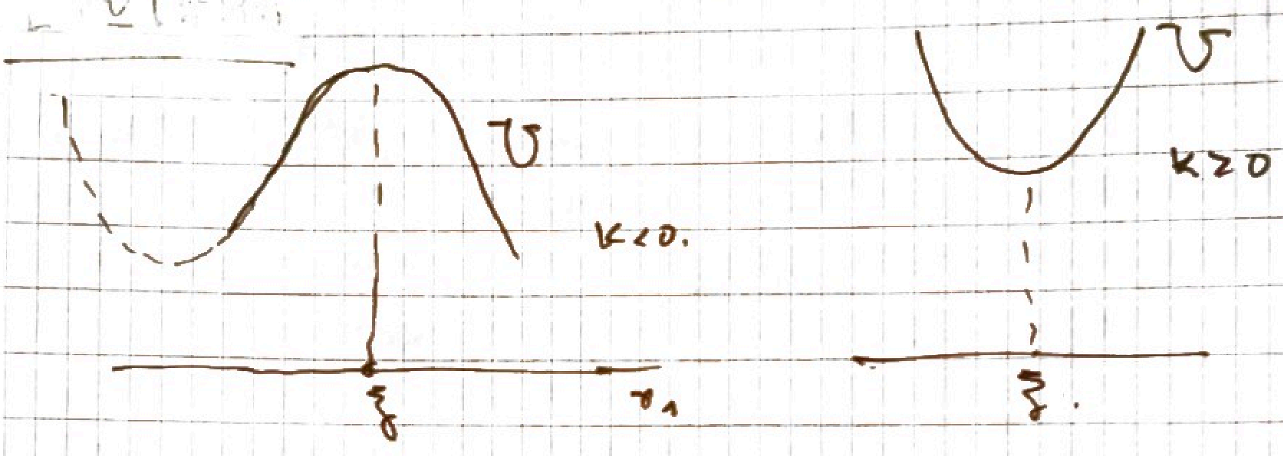
$$\boxed{H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{g}{l}\cos x_1}$$

(1) <u>Περιοδικές</u> (μη κρίσιμες)

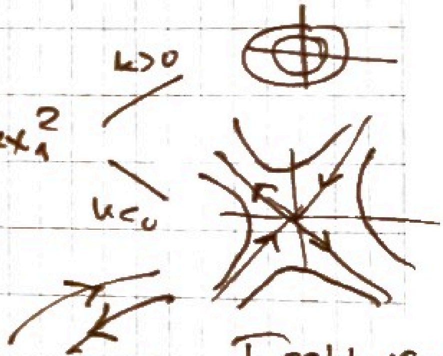
(2) <u>Ομοκλινείς</u> (κρίσιμες)

(3) <u>Ετεροκλινείς</u> (").

<u>Τοπική Ισοδυναμία Μη Γραμμικών Με Γραμμικά</u>



<u>Γραμμική περίπτωση</u> : $U=\frac{kx^2}{2}$ $\quad 2H = x_2^2 + kx_1^2$

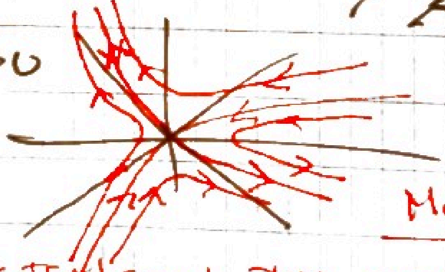


<u>Γραμμικό</u>

$\boxed{\text{Μη Εκφυλισμένη}}$ <u>Γενική Περίπτωση</u>

$$U'(\xi)=0,\quad U''(\xi)\neq 0$$

$$H = U(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$



<u>Μη Γραμμικό</u>

<u>Ερώτημα</u> : ∃? αλλαγή μεταβλητών που τοπικά να "γραμμικοποιεί" το Μη γραμμικό ?? (κανονικοποίηση τοπικά).

<u>Ορ</u> : $x=h(y)$, $h:(-\delta,\delta)\to(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon,\delta>0$, $h(0)=0$ λέγεται C^1 <u>αλλαγή μεταβλητών</u> ή <u>αμφιδιαφόριση</u> αν

(α) h 1-1

(β) h, h^{-1} C^1

④

Απάντηση (Morse Λήμμα)

$\exists$ h, αμφιδιαφόριση, $x_1 = h(y)$ τ.ω.

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) - U(\xi)}_{H(x_1,x_2)} = \tfrac{1}{2}x_2^2 + U(h(y)) - U(\xi) = \underbrace{\tfrac{1}{2}x_2^2 - y^2}_{\hat{H}(y,x_2)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \\ x_2' = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}\end{array}\right. \overset{\text{τοπικά}}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial x_2} \\ x_2' = -\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial y}\end{array}\right\}$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (y, x_2), \qquad y = h^{-1}(x_1)$$

Απόδειξη

Λήμμα 1 (Hadamard)

G C^2, $G: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $G(0) = 0$, $G'(0) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists$ $g(x)$, C^1, $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

$$G(x) = x g(x), \quad G'(0) = g(0)$$

Απ $G(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(tx)\,dt = x\int_0^1 G'(tx)\,dt =: x\,\boxed{g(x)}$

$$G'(x) = g(x) + x g'(x), \quad G'(0) = g(0).$$

∎

Λήμμα 2 (Morse)

$F(x)$ C^3, $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $F(0) = F'(0) = 0$, $F''(0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ C^1 αλλαγή μεταβλητών, $x = h(y) = 0$

$$h'(0) = \sqrt{\frac{2}{F''(0)}} \neq 0$$

τ.ω. $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$F(x) = F(h(y)) = (\operatorname{sgn} F''(0))\, y^2.$$

Απ

$\exists f$, $\boxed{F'(x) = x f(x)}$ (Hadamard, Λήμμα)

$F''(0) = f(0)$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[F(tx)]\,dt = x \int_0^1 F'(tx)\,dt = x^2 \int_0^1 t f(tx)\,dt$$

$$=: x^2 \varphi(x)$$

$\varphi(x) := \int_0^1 t f(tx)\,dt$, $\varphi(0) = \frac{1}{2} F''(0) \neq 0$

$y = x(\varphi(x))^{1/2} =: h_1^*(x)$, αν $\varphi(0) > 0$

$y = x(-\varphi(x))^{1/2} =: h_2^*(x)$, αν $\varphi(0) < 0$

Έστω $(h_i^*)^{-1} =: h_i$

$$h_i(h_i^*(x)) = x, \quad h_i^*(h_i(y)) = y$$

$$F(x) = x^2 \varphi(x) = (h_1^*(x))^2 \Rightarrow F(h_1(y)) = y^2.$$

$\square$

Δ.Σ. $\{\varphi(t,\cdot)\}$

(α) $\varphi(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς ως προς t και y

(β) $\varphi(t,\cdot)$ 1-1, $\varphi(-t,\cdot)$ αντίστροφη

(γ) $\varphi(0,y_0)=y_0 \quad \forall\, y_0\in\mathbb{R}^n$

(δ) $\varphi(t+\tau,y_0)=\varphi(t,\varphi(\tau,y_0))$, $\forall\, t,\tau,y_0$

Πρόταση

Έστω $x'=f(x)$, $f\in C^1$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

Έστω $\forall\; x(0)=y_0$ η λύση $\exists$ ολική

Τότε η απεικόνιση της λύσης,

$$\varphi(t,y_0):=x(t;y_0)$$

είναι Δ.Σ.

Απ

(γ) ✓

(δ): $x(t)=\varphi(t+\tau,y_0)$, $y(t)=\varphi(t,\varphi(\tau,y_0))$

$\downarrow$

$$\boxed{(*)\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=f(z)\\ z(0)=\varphi(\tau,y_0)\end{cases}}$$

$x(t)$, $y(t)$ ικανοποιούν το $(*)$ $\Rightarrow$ $x(t)\equiv y(t)$

(γ),(δ) $\Rightarrow$ (β) : $\varphi(t-t,y_0)=\varphi(-t,\varphi(t,y_0))$

(α) : $t\to\varphi(t,y_0)$ συνεχώς προφανές.

Απόδειξη Συνέχειας ως προς Α.Σ.

Πρόταση

Έστω f τοπικά Lipschitz, και έστω $y(t), z(t)$ λύσεις της

$$(*) \qquad x' = f(x) \qquad t \in [0,T], \quad T>0$$

που περιέχονται στο $W \subset \mathbb{R}^n$, W φραγμένο.

Τότε ισχύει η εκτίμηση

$$(2) \qquad |y(t) - z(t)| \leq |y(0) - z(0)| e^{Kt}$$

K σταθερά, $K(W)$.

Απ

(I) (Gronwall)

$u : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$, συνεχής, ≥ 0. Έστω $C \geq 0$, $K \geq 0$ τ.ω.

$$u(t) \leq C + \int_0^t K u(s)\, ds, \qquad t \in [0, \alpha]$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq u(t) \leq C e^{Kt}, \qquad t \in [0,\alpha]$$

Απ

$$U(t) := C + \int_0^t K u(s)\, ds > 0 \qquad (\text{Έστω } C > 0)$$

$\Rightarrow \boxed{u(t) \leq U(t)}$ (3)

$U'(t) = Ku$ (4)

$\therefore$

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{Ku(t)}{U(t)} \overset{(3)}{\leq} K$$

$\therefore$

$$\frac{d}{dt}(\ln U(t)) \leq K \Rightarrow \ln U(t) \leq \ln U(0) + Kt$$
$$\Rightarrow U(t) \leq C e^{Kt}. \qquad \square$$

II

$v(t) = |y(t) - z(t)|$

$$y(t) - z(t) = y(0) - z(0) + \int_0^t [f(y(s)) - f(z(s))]\,ds$$

$$|f(y) - f(z)| \le K|y - z|$$

$\Rightarrow$

$$|v(t)| \le |v(0)| + \int_0^t K v(s)\,ds$$

Gronwall $\Rightarrow$ $v(t) \le v(0) e^{Kt}$.

$\square$

Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ Δ.Σ.

Θετική υπότροχια : $\gamma^+(x_0) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid y = \varphi(t, x_0),\ t \ge 0 \}$

Αρνητική — : $\gamma^-(x_0) = \{ \text{—} \mid \text{—},\ t \le 0 \}$

Τροχιά $= \gamma^+ \cup \gamma^-$

ω-οριακό σύνολο : $\omega(x_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi = \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k, x_0),\ t_k \to +\infty \}$

$\alpha(x_0) = \{ \text{— — —},\ t_k \to -\infty \}$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$

$$\omega(x_0) = \bigcap_{\tau \ge 0} \overline{\{ \varphi(t, x_0) \mid t \ge \tau \}}$$