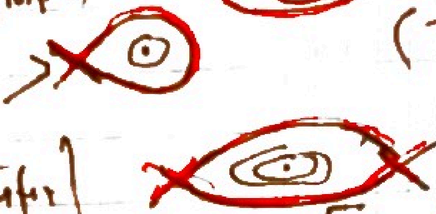
Διάλεξη 8

(α) Περιοδικές (Μη κρίσιμη)

(— "Ιχθύς")

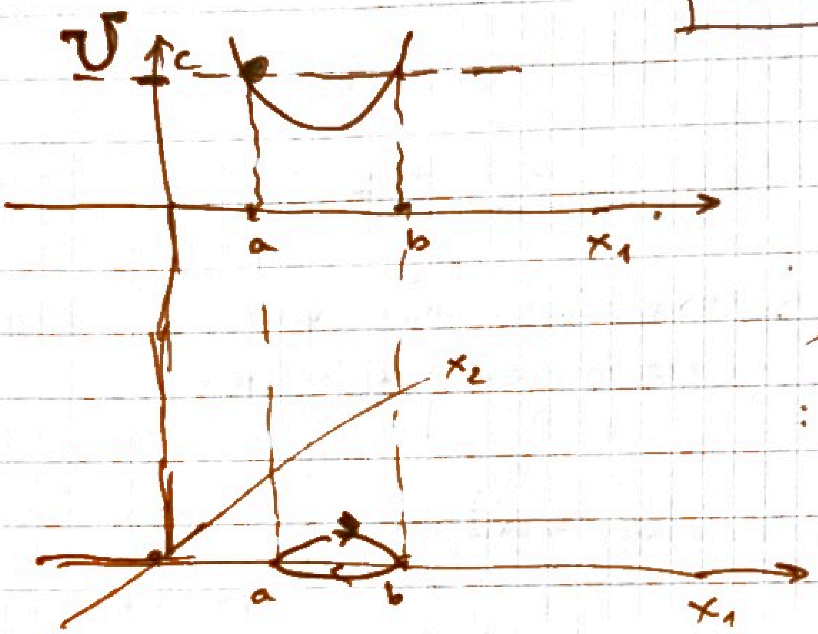
(β) Ομοκλινείς (Κρίσιμη)

(γ) Ετεροκλινείς (Κρίσιμη)



$$\boxed{x'' - f(x) = 0}$$

(2)



$$(*)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1) \end{cases}$$

$$H(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} x_2^2 + U(x_1)$$

$$U(x_1) = -\int_0^{x_1} f(t)$$

$$H_c = \{ (x_1, x_2) \mid H(x_1, x_2) = c \}$$

Θεώρημα 1 : $U'(a) \neq 0, \quad c = U(a)$, $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0) \in H_c$] Υποθέσεις

Συμπέρασμα : Περιοδική

Η λύση της (*) είναι περιοδική, $\exists\, T>0 \;\; x(t+T) = x(t) \;\; \forall t$, και κινείται πάνω της H_c.

Τέλος

$$T = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(c - U(x_1))}}$$

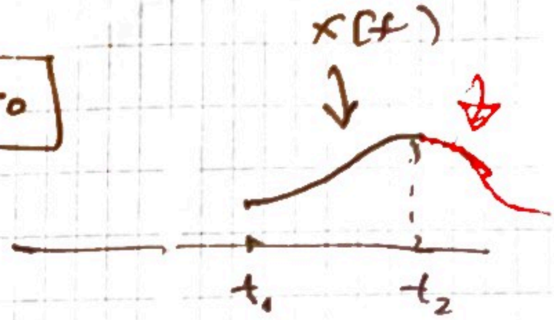
Απ.

A. (1) $\frac{1}{2}(x'(t))^2 + U(x(t)) = \frac{1}{2}(x'(0))^2 + U(x(0)) = c$

$x(T) =$

Θέτουμε $\frac{T}{2} = t_2 - t_1$.

Παρατηρούμε από (1) ότι $\boxed{x'(t_2)=0}$



B. Επέκταση

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t_1 \le t \le t_2 \\ x(t_2-(t-t_2)) = x(2t_2-t) \end{cases}$$ (ανάκλαση άρτια)

$\bar{x}(\cdot)$ C^1 στο $\boxed{t=t_2}$

Θα δείξουμε ότι είναι C^2 στο $\boxed{t=t_2}$

C^1

$t<t_2$ $\bar{x}''(t) = x''(t) = f(x(t))$

$t \ge t_2$ $\bar{x}''(t) = x''(2t_2-t) = f(x(2t_2-t))$

$x''(t_2^-) = f(x(t_2^-))$

$\bar{x}''(t_2^+) = f(x(2t_2^+-t_2^+)) = f(x(t_2^+))$

Δύο στοιχεία: Μόνο 2η παράγωγος στην εξίσωση $\longrightarrow$ $x(2t_2-t)$ επίσης λύση.

$x'(t_2)=0$

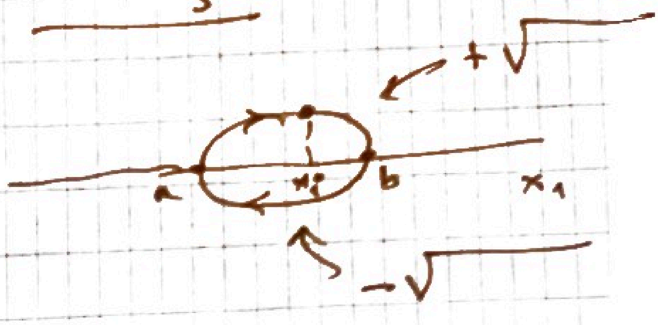
$$\bar{x}(t_1+T) = x(2t_2-(t_1+T)) = x(\underbrace{t_2-t_1}_{T/2} + t_2 - T) = x(t_1) = \bar{x}(t_1)$$

∴ Περιοδική (Αντινομη).

$\square$

(2) $\begin{cases} x' = \pm\sqrt{c - U(x)} \\ x(0) = x_1^0 \end{cases}$

1ος τρόπος



Έστω $\underline{x'(0) > 0}$ $\Rightarrow +\sqrt{}$

(3) $\begin{cases} x' = \sqrt{c - U(x)} \\ x(0) = x_1^0 \end{cases}$

- $\exists \quad t_1 < 0 < t_2$ τ.ω. $x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b$

Απ : Άτοπο. Έστω ότι $x(t) < b, \quad t \geq 0$

Από (3) $\Rightarrow x'(t) > 0 \Rightarrow t \to x(t) \uparrow$

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(c - U(x))}} = \int_0^t dt = t \longrightarrow +\infty$$

$$\therefore \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(c - U(x))}} \longrightarrow +\infty$$

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(c - U(x))}} < \int_0^{b} \frac{dx}{\sqrt{2(c - U(x))}}$$

Ιδιομορφία στο b

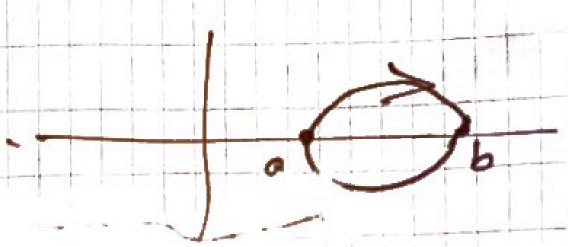
$$U(b) = c, \quad U'(b) \neq 0$$

$$U(x) = U(b) + U'(b)(x - b) \cong c - U'(b)(b - x)$$

$$\therefore c - U(x) \cong U'(b)(b - x). \quad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{2U'(b)(b - x)}} < +\infty$$

Άτοπο.

Γ. Καμπύλη της H_c



Έστω $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in H_c$
$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (a,0), (b,0)$

Έστω $\boxed{\bar{x}_1 \in (a,b)}$, $\bar{x}_2 > 0$

- Ισχυριζόμαστε ότι $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \gamma := \{ x(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Λόγω συνέχειας η $x(t)$ παίρνει την τιμή $\bar{x}_1$,

$$\left\{ x_1(t^*) = \bar{x}_1 \quad , \quad x_1' = \sqrt{2(c - U(x_1))} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\bar{x}_2^2 + U(\bar{x}_1) = c \Rightarrow \bar{x}_2 \text{ προσδιορίζεται μέχρι πρόσημο.} \\ \Rightarrow \bar{x}_2 = x_1'(t^*) \end{array} \right.$$

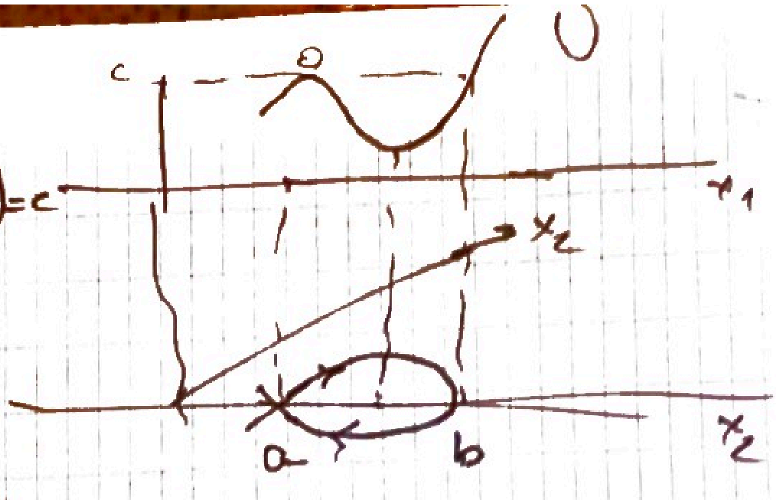
Τέλος

$x_1(0) = \bar{x}_1$, $x_2(0) = \bar{x}_2 \to (x_1(t), x_2(t))$

$x_1(t^*) = \bar{x}_1$, $x_2(t^*) = \bar{x}_2 \to (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))$

Ταυτίζονται ως τροχιές.

$\square$



Θεώρημα 2 : $U'(a)=0,\ U(a)=c$
$U'(b)\neq 0$

$(x_1(0),x_2(0))=(x_1^0,x_2^0)\neq(a,0)$

Συμπέρασμα : Ομοκλινές

∃ λύση της (*) τ.ω. $(x_1^0,x_2^0)\in \boxed{H_c}$

$$\lim_{t\to\pm\infty}(x_1(t),x_2(t))=(a,0)$$

σημείο ισορροπίας

$$H_c=\{(x_1(t),x_2(t))\mid t\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,0)\}$$

Θεώρημα 3 : $U'(a)=U'(b)=0,\quad U(a)=U(b)=c$
$(x_1(0),x_2(0))=(x_1^0,x_2^0)\neq(a,0),(b,0)$

Συμπέρασμα : Ετεροκλινής [συνδέουσα τροχιά]

∃ λύση της (*) τ.ω.

$$\lim_{t\to-\infty}(x_1(t),x_2(t))=(a,0)$$

$$\lim_{t\to+\infty}(x_1(t),x_2(t))=(b,0)$$

Παραδείγματα 10.11
— " — 10.12
— " — 10.13

$$H_c=\{(x_1(t),x_2(t))\mid t\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,0)\}\cup\{(b,0)\}.$$

□