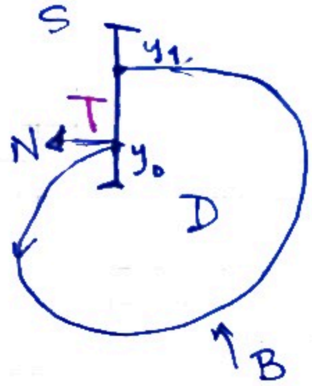
Εναλλακτική Απόδειξη Λήμματος 1

Λήμμα 1

S τοπική διατομή, $y_n = \varphi(t_n, x_0) \in S$, $t_1 < t_2 < \dots$

τότε η $\{y_n\}$ είναι μονότονη ως προς την διατομή S

Απ



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $y_2 \in (y_0, y_1)$

Προσανατολίζουμε την S θέτοντας στο T την μοναδιαία κάθετο N προς τα έξω από το D.

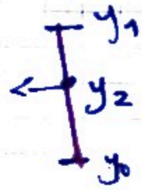
Υποθέτουμε ότι $f(y_1)\cdot N > 0$, και κατά συνέπεια

$f(y)\cdot N > 0 \quad \forall y \in T$

Έστω ότι $y_2 \in (y_0, y_1)$. $f(y)\cdot N > 0$ και

κατά συνέπεια η τροχιά εξέρχεται στο y_2.

Έπεται ότι $\varphi(t_2-\varepsilon, x_0) \in D$, $\varepsilon>0$ μικρό.

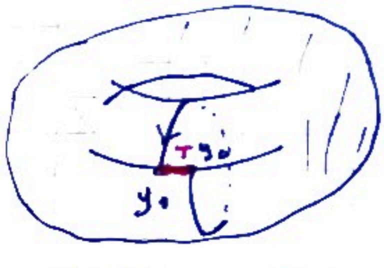


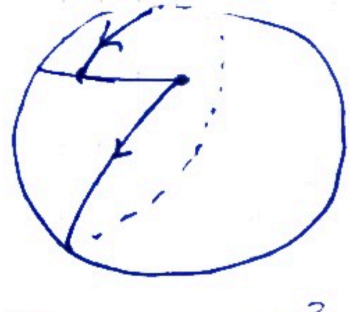
Όμως η τροχιά εξέρχεται στο y_1, και

εφόσον το D^c είναι θετικά αναλλοίωτο

για να εισέλθει στο D πρέπει να διασχίσει την απλή κλειστή καμπύλη $\Sigma = B \cup T \cup \{y_0, y_1\}$, που είναι αδύνατον. Εδώ χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Jordan. □

Σχόλιο



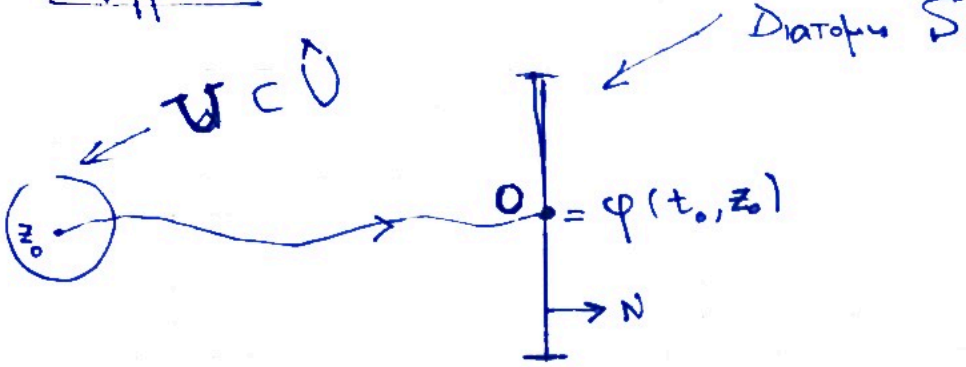


Δεν ισχύει για τον torus – κλειστή τροχιά δεν τον χωρίζει σε δύο τοπολογικούς δίσκους

Ισχύει για S^2 - κλειστή τροχιά χωρίζει σε δύο δίσκους.

Σημείωση: Το Poincaré-Bendixson ισχύει στην S^2

Λήμμα 4



Έστω S διατομή στο O και $\varphi(t_0,z_0)=0$.
$\exists$ ανοικτό σύνολο $U \ni z_0$, και μοναδική απεικόνιση $\tau: U \to \mathbb{R}$, $\tau \in C^1$ τ.ω. $\tau(z_0)=t_0$ και $\varphi(\tau(x),x) \in S$, $\forall x \in U$

Απ.

Έστω $h(x) = \langle x, N \rangle$, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ εσ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$, $N \perp S$

Διατομή $\Rightarrow$ $h(f(0)) \neq 0$.

Ορίζουμε

$$G(x,t) = h(\varphi(t,x))$$

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης:

$$G(z_0,t_0) = h(\varphi(t_0,z_0)) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(z_0,t_0) = \langle f(0), N \rangle \neq 0$$

$\therefore$ $\exists$ περιοχή U του z_0 και απεικόνιση $\tau: U \to \mathbb{R}$, $\tau \in C^1(U)$, τ.ω.

$$G(x, \tau(x)) = 0, \quad x \in U, \quad \tau(z_0) = t_0$$

$\square$

Σημ: Η συνάρτηση $h(\varphi(t,x))$ είναι προβολή επί της Διατομής.

Coda Αποδειξης Θεωρηματος 1

Εχουμε δειξει οτι $\gamma \subset \omega(x_0)$, γ κλειστη τροχια (μη τετ[illegible] [illegible])

<u>Ισχυρισμος</u> : $\gamma = \omega(x_0)$

Αρκει να δειξουμε οτι

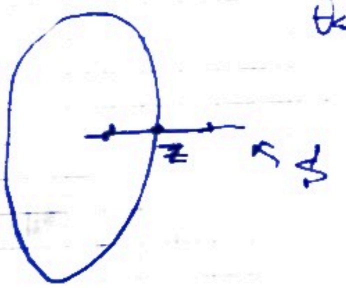
$$(*) \quad \lim_{t \to +\infty} d\,(\varphi(t, x_0), \gamma) = 0$$

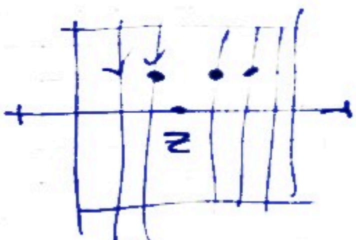
Αποδειξη της (*)

Εστω $z \in \gamma$. Θεωρουμε διατομη S στο z, $S \cap \gamma = \{z\}$

$\gamma = \omega(x_0)$

Θεωρουμε και το κιβωτιο ροης V_ε περι το z





$z \in \omega(x_0) \Rightarrow \exists$ ακολουθια $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$

(1) $\varphi(t_n, x_0) \in S$, $\varphi(t_n, x_0) \longrightarrow z$

(κανουμε χρηση των V_ε και του Λημματος 4)

Θετουμε $x_n = \varphi(t_n, x_0)$. Γνωριζουμε απο το Λημμα 1 οτι η $\{x_n\}$ ειναι μονοτονη στο S, $x_n \to z$

- Ισχυριζομαστε οτι $\exists$ φραγμα M,

(2) $\quad 0 < t_{n+1} - t_n \leq M$

(που σχετιζεται με την περιοδο της γ)

<u>Παρατηρηση</u> : Μπορουμε να υποθεσουμε οτι $\varphi(t, x_0) \notin S$, $t \in (t_{n-1}, t_n)$ διοτι αν $\exists\, \hat{t}_n \in (t_{n-1}, t_n)$ με $\varphi(\hat{t}_n, x_0) \in S$, τοτε το "προσθετουμε" στην ακολουθια $\{x_n\}$. Λογω του Λημματος 1 και

η καινουργια ακολουθια εξακολουθει να συγκλινει στο z.

Συνεπως εχουμε χ.β.γ.

(3) $$\varphi(t,x_0) \notin S, \quad t \in (t_{n-1}, t_n).$$

Η γ ειναι περιοδικη, με περιοδο $T>0$, $\varphi(T,z)=z$.

$$x_n \to z \Rightarrow \varphi(T,x_n) \to \varphi(T,z)=z$$

Κατα συνεπεια μεσω του κιβωτιου ροης $\exists\ \tau_n$, $|\tau_n|<\mu$

τ.ω.

(4) $$\varphi(T+\tau_n, x_n) \in S$$

(5) $$\varphi(T+\tau_n, x_n) = \varphi(T+\tau_n, \varphi(t_n,x_0)) = \varphi(t_n+T+\tau_n, x_0)$$

Προκυπτει μεσω της (3) οτι

(6) $$t_{n+1} < t_n + T + \tau_n$$

δηλ. η (2) επαληθευτηκε.

Δοθεντος $\varepsilon>0$ $\exists\ n_0(\varepsilon)$ τ.ω.

(7) $$|\varphi(t,x_n)-\varphi(t,z)|<\varepsilon, \quad \text{για } n>n_0(\varepsilon), \quad |t| \leq M.$$

απο $x_n \to z$ και συνεχη εξαρτηση ως προς αρχικες συνθηκες.

Εχουμε για $t_n \leq t \leq t_{n+1}$:

(8) $$d(\varphi(t,x_0),\gamma) \leq |\varphi(t,x_0)-\varphi(t-t_n,z)| \quad (\text{διοτι } \varphi(t-t_n,z) \in \gamma)$$

$$= |\varphi(t-t_n,x_n)-\varphi(t-t_n,z)|$$

$$(\text{διοτι } \varphi(t-t_n,x_n)=\varphi(t-t_n,\varphi(t_n,x_0))=\varphi(t,x_0))$$

$$\overset{(7)}{\leq} \varepsilon.$$

Η Αποδειξη του Θεωρηματος 1 ειναι πληρης.

Απόδειξη Θεωρήματος 2

Αν το $\omega(x_0)$ δεν περιέχει σημεία ισορροπίας τότε από Θεώρημα 1 $\omega(x_0)=$ περιοδική τροχιά.

Αν το $\omega(x_0)$ περιέχει μόνο σημεία ισορροπίας τότε τετριμμένα

$$\forall\, y\in\omega(x_0),\quad f\big|_{\alpha(y)} = f\big|_{\omega(y)} = 0$$ από αναλλοίωτο του $\omega(x_0)$.

Έστω λοιπόν ότι το $\omega(x_0)$ περιέχει και σημεία ισορροπίας, και ξ τ.ω. $f(\xi)\neq 0$.

Έστω γ μία τροχιά, $\gamma=\{\varphi(t,\xi)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

Θα δείξουμε ότι $\omega(\gamma)\subset\{x\mid f(x)=0\}$.

Έστω ότι $\exists\, q\in\omega(\gamma)$, $f(q)\neq 0$. Θεωρούμε μια διατομή S κεντραρισμένη στο q. Από Λήμμα 3 η $\gamma=\gamma(\xi)$ τέμνει την S το πολύ σε ένα σημείο. Κάνοντας χρήση το κουτί ροής για τη Λήμματος 4 γνωρίζουμε ότι $\gamma\cap S\neq\emptyset$.

Εφόσον το $q\in\omega(\gamma)$ υπάρχουν χρόνοι t_1, t_2, $t_1\neq t_2$ τ.ω. $\varphi(t_1,\xi), \varphi(t_2,\xi)$ εντός του κουτιού ροής στο q, και κατά ανάγκη t_1', t_2', $t_1'\neq t_2'$, $\varphi(t_i',\xi)\cap S\neq\emptyset$.

Αναγκαστικά $\varphi(t_1',\xi)=\varphi(t_2',\xi)=q$. Κατά ανάγκη η γ είναι περιοδική. Άτοπο διότι $\omega(\gamma)\cap\{x\mid f(x)=0\}$

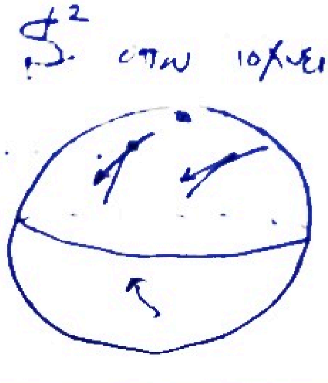
$\square$

Δυνατά Σενάρια – Παραδείγματα

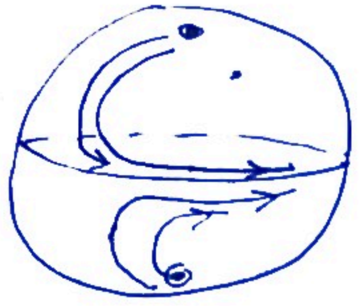
Θεωρούμε την S^2 όπου ισχύει το Poincaré–Bendixson με την ίδια απόδειξη.

$f\in C^1(S^2)$, $f(x)\in T_x$

Δ.Π : Εφαπτόμενο στην S^2



1)



Πόλοι: $f(P) = 0$

Ισημερινός = κλειστή τροχιά.

f

2) $\varphi : S^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^\infty$, $\varphi \geq 0$, $\{\varphi = 0\}$ = Ισημερινός.

Θεωρούμε το Δ.Π. $g = \varphi f$, f όπως στο 1).

$\forall p$, $\omega(p)$ = Ισημερινός = $\{x \mid g(x) = 0\}$. Το Poincaré-Bendixson

$p \notin$ Ισημερινό

δεν ισχύει αν

$\#(\{f = 0\}) = \infty$.

3) Το σενάριο

άπειρες —

είναι δυνατό! (θα το εξηγήσετε μέσω άσκησης)

4) Αν $p_1 \neq p_2$, $p_1, p_2 \in \omega(x_0)$, τότε υπάρχει το πολύ μία τροχιά $\gamma \in \omega(x_0)$ με

$$\alpha(x_0) = p_1, \qquad \omega(x_0) = p_2.$$

(θα το εξηγήσουμε)

$\square$