f C^1 σε περιοχή του $\overline{y}$

Θεώρημα 10.9 *Έστω $\overline{\boldsymbol{y}}$ σημείο ισορροπίας όπως στην (10.76). Εάν όλες οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής $D\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{y}})$ έχουν **αυστηρά** αρνητικό πραγματικό μέρος,* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, ***τότε*** *το σημείο ισορροπίας $\overline{\boldsymbol{y}}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα (10.75).*

Απόδειξη: Εισάγουμε την μεταβλητή $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \overline{\boldsymbol{y}}$, που μετρά τη διαφορά της λύσης από το σημείο ισορροπίας. Τότε η (10.75) παίρνει τη μορφή

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{y}}). \tag{10.81}$$

Από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{y}}) + D\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),$$

όπου

(βλ. Marsden και Tromba [40]) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\cancel{D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}}$ $g(x) = o(\|x\|)$ (10.82)

Γράφουμε την (10.81) στη μορφή

$$\boldsymbol{x}' = D\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) =: A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}). \tag{10.83}$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι το $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα (10.83). Σε όσα ακολουθούν θα χρειαστούμε δύο στοιχεία από προηγούμενες γνώσεις. Πρώτα υπενθυμίζουμε ότι για το γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \;\; , \;\; \boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{x}_0,$$

που ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathrm{Re}\,\lambda(A) < 0$, έχουμε την εκτίμηση

$$||e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0||_E \le Ke^{-\alpha t}||\boldsymbol{x}_0||_E, \quad t \ge 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2. \tag{10.84}$$

όπου $K > 0$ σταθερά και α αυθαίρετος σταθερός αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα $\mathrm{Re}\,\lambda(A) < -\alpha$ (βλ. Παράδειγμα 10.8).

Επίσης θα κάνουμε χρήση της ακόλουθης εκτίμησης: δοθέντος $m > 0$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\boldsymbol{y}$ με $||\boldsymbol{y}||_E < \varepsilon$ ισχύει η

$$||\boldsymbol{g}(\cancel{\boldsymbol{y}})||_E \le m||\cancel{\boldsymbol{y}}||_E, \tag{10.85}$$ /x

Που προκύπτει άμεσα από ~~[illegible]~~

$$\boldsymbol{g}(\cancel{\boldsymbol{y}}) = o(||\cancel{\boldsymbol{y}}||_E).$$ /x

~~Αυτό αποδεικνύεται ως εξ~~ής:

(α) Από την (10.82) προκύπτει ότι $\nabla g_i(0) = 0$ και η g_i είναι συνάρτηση C^1. Συνεπώς αν δοθεί $m > 0$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$||\boldsymbol{y}||_E < \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; ||\nabla g_i(\boldsymbol{y})||_E < m. \tag{10.86}$$ /x

$\int_0^1 \frac{d}{dt}[g_i(tx)]\,dt$

(β) $g_i(\boldsymbol{y}) - g_i(\boldsymbol{0}) = \int_0^1 \nabla g_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \cancel{\boldsymbol{y}}\, dt$, και παίρνοντας απόλυτες τιμές

$$\begin{aligned}
|g_i(\boldsymbol{y}) - g_i(\boldsymbol{0})| &= \left|\int_0^1 \nabla g_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{y}\, dt\right| \leq \int_0^1 |\nabla g_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \cancel{\boldsymbol{y}}|\, dt \\
&\leq \int_0^1 ||\nabla g_i(\boldsymbol{\varphi}(t))||_E ||\cancel{\boldsymbol{y}}||_E\, dt \leq \int_0^1 m||\cancel{\boldsymbol{y}}||_E\, dt \\
&\leq m||\boldsymbol{y}||_E,
\end{aligned}$$

όπου κάναμε διαδοχικά χρήση γνωστής ιδιότητας των ολοκληρωμάτων, της ανισότητας Cauchy–Schwartz και του (α).

Επανερχόμαστε τώρα στην (10.83). Κάνοντας χρήση του τύπου μεταβολής των παραμέτρων (βλ. υποενότητα 6.3.3) γράφουμε την (10.83) στη μορφή

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\, ds. \tag{10.86}$$

Παίρνοντας νόρμες και περνώντας τη νόρμα μέσα στο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}(t)||_E &\leq Ke^{-\alpha t}||\boldsymbol{x}_0||_E + \int_0^t ||e^{A(t-s)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))||_E\, ds \\
&\leq Ke^{-\alpha t}||\boldsymbol{x}_0||_E + \int_0^t ||e^{A(t-s)}||_E ||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))||_E\, ds \\
&\leq Ke^{-\alpha t}||\boldsymbol{x}_0||_E + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}m||\boldsymbol{x}(s)||_E\, ds,
\end{aligned}$$

μέσω των (10.84) και (10.85) και υποθέτοντας ότι $||\boldsymbol{x}(s)||_E < \varepsilon$ για $0 \leq s \leq t$. Πολλαπλασιάζουμε με $e^{\alpha t}$ οπότε η παραπάνω ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$e^{\alpha t}||\boldsymbol{x}(t)||_E \leq K||\boldsymbol{x}_0||_E + \int_0^t Kme^{\alpha s}||\boldsymbol{x}(s)||_E\, ds.$$

Από το Θεώρημα 2.2 εξάγεται η εκτίμηση

$$e^{\alpha t}||\boldsymbol{x}(t)||_E \leq K||\boldsymbol{x}_0||_E e^{\int_0^t Km\, ds} = K||\boldsymbol{x}_0||_E e^{Kmt},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$||\boldsymbol{x}(t)||_E \leq K||\boldsymbol{x}_0||_E\, e^{-(\alpha - Km)t}. \tag{10.87}$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε κάποιες διευκρινίσεις σχετικά με τις παραπάνω επιλογές. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό ευστάθειας: δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $\boldsymbol{x}_0$ με $||\boldsymbol{x}_0||_E < \delta$, να ισχύει ότι $||\boldsymbol{x}(t)||_E < \varepsilon$ για $t \geq 0$. Κατ' αρχήν δοθέντος $\varepsilon > 0$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (10.85) ισχύει με m που να ικανοποιεί την

$$\alpha > Km \tag{10.88}$$

και αυτό διότι σε άλλη περίπτωση μπορούμε να αντικαταστήσουμε το δοσμένο $\varepsilon > 0$ με μικρότερο. Σταθεροποιούμε λοιπόν ένα τέτοιο $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε δ τέτοιο ώστε

$$\delta \leq \varepsilon \;, \quad K\delta < \varepsilon. \tag{10.89}$$

Από την $||\boldsymbol{x}_0|| < \delta \leq \varepsilon$ και την ιδιότητα συνέχειας (α) των δυναμικών συστημάτων προκύπτει ότι για μικρό t ισχύει η

$$||\boldsymbol{x}(s)||_E < \varepsilon, \quad \text{για } 0 \leq s \leq t. \tag{10.90}$$

Έστω τώρα t^* το μέγιστο t για το οποίο ισχύει η ανισότητα (10.90), και έστω $t^* < +\infty$. Αναγκαστικά τότε $||\boldsymbol{x}(t^*)||_E = \varepsilon$. Από τις (10.87),(10.88) και (10.89) όμως έχουμε

$$||\boldsymbol{x}(t^*)||_E \leq K||\boldsymbol{x}_0||_E e^{-(a-Km)t^*} \leq K\delta e^{-(a-Km)t^*} < \varepsilon,$$

που οδηγεί σε αντίφαση. Συνεπώς $t^* = +\infty$ αν η λύση δεν παύει να υπάρχει σε πεπερασμένο χρόνο. Από την εκτίμηση (10.90) που ισχύει για όσο η λύση υπάρχει, προκύπτει ότι η λύση δεν εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο. Από τη σημείωση 10.4 έπεται ότι έχουμε ολική ύπαρξη για $t \geq 0$. Συνεπώς για όλα τα t ισχύει η εκτίμηση

$$||\boldsymbol{x}(t)||_E < \varepsilon, \; t \geq 0 \;\Leftrightarrow\; ||\boldsymbol{y}(t) - \overline{\boldsymbol{y}}||_E < \varepsilon, \; t \geq 0,$$

η οποία αποδεικνύει ευστάθεια. Για την ασυμπτωτική ευστάθεια επιχειρηματολογούμε ως εξής: από την εκτίμηση της ευστάθειας $||\boldsymbol{x}(t)||_E < \varepsilon$ για $t \geq 0$ έπεται ότι η (10.87) ισχύει για $t \geq 0$. Κατά συνέπεια, λαμβάνοντας υπόψη την (10.88) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} ||\boldsymbol{y}(t) - \overline{\boldsymbol{y}}|| = 0.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Αστάθεια μέσω γραμμικοποίησης

Θεωρούμε το σύστημα (10.75) και έστω $\overline{\boldsymbol{y}}$ σημείο ισορροπίας όπως στην (10.76). Θα δείξουμε ότι αν για το γραμμικοποιημένο σύστημα στο $\overline{\boldsymbol{y}}$ το $\mathbf{0}$ είναι ασταθές, δηλαδή ασταθής εστία ή σαγματικό σημείο, τότε το $\overline{\boldsymbol{y}}$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για το (10.75).

Ξεκινούμε διατυπώνοντας πιο λεπτομερώς τον ορισμό του ασταθούς σημείου ισορροπίας. Το $\overline{\boldsymbol{y}}$ είναι ασταθές αν υπάρχει κάποιο σταθεροποιημένο $\eta > 0$, για το οποίο να υπάρχουν αρχικές τιμές αυθαίρετα κοντά στο $\overline{\boldsymbol{y}}$ με αντίστοιχες λύσεις που να απομακρύνονται από το $\overline{\boldsymbol{y}}$ προκαθορισμένη απόσταση ίση με η σε κάποια χρονική στιγμή. Ο ορισμός με μεγαλύτερη ακρίβεια έχει ως εξής: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\boldsymbol{y}_0$ με $||\boldsymbol{y}_0 - \overline{\boldsymbol{y}}|| < \delta$ και χρόνος $t = t_{\boldsymbol{y}_0}$, τέτοια ώστε $||\varphi(t_{\boldsymbol{y}_0}, \boldsymbol{y}_0) - \overline{\boldsymbol{y}}|| = \eta$.

Σαν νόρμα στον παραπάνω ορισμό μπορούμε να πάρουμε είτε την $||\cdot||_E$ είτε την $||\cdot||_{max}$, είτε οποιαδήποτε άλλη νόρμα στο επίπεδο. Στη συνέχεια όταν γράφουμε απλά $||\cdot||$, θα εννοούμε την Ευκλείδια νόρμα $||\cdot||_E$.

Η απόδειξη της αστάθειας είναι σαφώς δυσκολότερη από την απόδειξη της ευστάθειας διότι οι λύσεις απομακρύνονται από το σημείο ισορροπίας για κάποιες αρχικές συνθήκες και όχι αναγκαστικά για όλες.

Δίνουμε πρώτα μία απλή εφαρμογή.