Διόρθωση παραδείγματος 10.30 από το βιβλίο Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2η έκδοση των Αλικάκος, Καλογερόπουλος

$$\begin{cases} y_1' = -ay_1 + by_2 \\ y_2' = -by_1 - ay_2 - \frac{1}{b} y_1^3 \end{cases} \qquad y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad a, b > 0$$

γ) Να προσδιοριστεί ο μεγαλύτερος δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων, πάνω στον οποίο η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ορισμένη, όπου

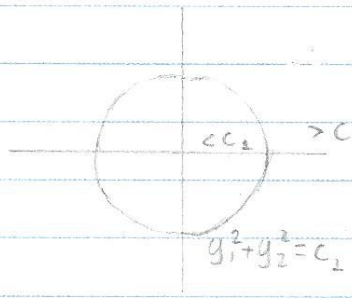
$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$$

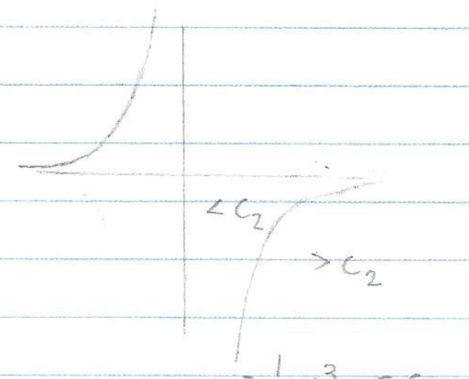
Απόδειξη: Όπως στο βιβλίο υπολογίζουμε $\dot{V}(y_1, y_2) = -a\left[(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{ab} y_1^3 y_2\right]$

(κοντά στο 0 είναι $y_1^2 + y_2^2 \geq 2|y_1 y_2| \overset{!}{\geq} \frac{1}{ab}|y_1^3 y_2| \geq \frac{1}{ab} y_1^3 y_2$ και για $(y_1, y_2) \neq 0$ τουλάχιστον μία από τις πρώτες δύο ανισότητες μπορεί να υποτεθεί γνήσια. Άρα πράγματι η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ορισμένη κοντά στο 0)

Υπολογίζουμε τις καμπύλες στάθμης $y_1^2 + y_2^2 = c_1 > 0$ και

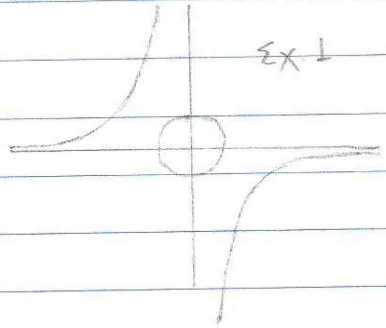
$-\frac{1}{ab} y_1^3 y_2 = c_2 > 0$

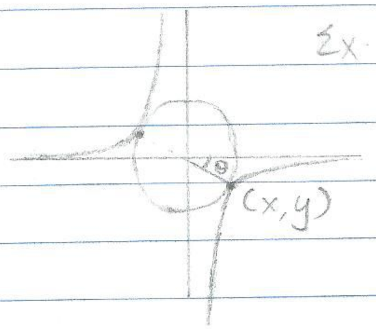




Οι ρίζες της $\dot{V}$ βρίσκονται ακριβώς στα σημεία τομής των επιφανειών στάθμης $y_1^2 + y_2^2 = c$, $-\frac{1}{ab} y_1^3 y_2 = c$.
Για $c = 0$ έχουμε τη ρίζα $(0,0)$
Όταν το c γίνει λίγο θετικό οι καμπύλες στάθμης της $-\frac{1}{ab} y_1^3 y_2$ "απομακρύνονται" πιο γρήγορα από το $(0,0)$ από ότι οι καμπύλες στάθμης της $y_1^2 + y_2^2$. Αυτό σημαίνει ότι κοντά στο 0, η $\dot{V}$ δεν μηδενίζεται. (σχήμα 1)

Άρα για βρούμε την κοντινότερη ρίζα της $\dot{V}$ στο 0, αρκεί να βρούμε το ελάχιστο c για το οποίο οι καμπύλες $y_1^2+y_2^2=c$, $-\frac{1}{\alpha\beta}y_1^3y_2=c$ έχουν κοινό σημείο (σχήμα 2)





$y_1^2+y_2^2=f(y_1,y_2)$

$-\frac{1}{\alpha\beta}y_1^3y_2=g(y_1,y_2)$

Στο κρίσιμο c οι καμπύλες $f=c$, $g=c$ εφάπτονται, έστω στα σημεία (x,y) και $(-x,-y)$ (με $x>0$, $y<0$)

Τότε $\nabla f(x,y) \parallel \nabla g(x,y) \iff (2x,2y) \parallel -\frac{1}{\alpha\beta}(3x^2y, x^3) \overset{x,y\neq 0}{\iff}$

$(x,y) \parallel (3y,x) \iff \frac{y}{x}=\frac{x}{3y} \iff 3y^2=x^2 \iff \underline{x=-\sqrt{3}\,y}$

Άρα $x^2+y^2=c \Rightarrow 4y^2=c \iff y=-\frac{\sqrt{c}}{2}$ και $x=\frac{\sqrt{3c}}{2}$

και $-\frac{1}{\alpha\beta}x^3y=c \Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta}\frac{3\sqrt{3}}{16}c^2=c \iff \underline{c=\frac{16\alpha\beta}{3\sqrt{3}}}$

Άρα $\underline{x=2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\sqrt{3}}}}$ και $\underline{y=-2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{3\sqrt{3}}}}$

(παρατηρούμε και ότι $\frac{|y|}{|x|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ και άρα $\theta=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$.)