1. Ο τύπος της Μεταβολής των Παραμέτρων (6.3 [ΑΚ])

Θεωρούμε $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,2$.

$$(1) \quad \begin{cases} x' = Ax + B(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ συνεχής.}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος

$$(2) \quad \begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

είναι $y(t) = e^{At} y_0$. $\left(\frac{dy}{dt} = Ae^{At} y_0 = Ay\right)$

Αναζητούμε λύση της (1) της μορφής

$$(3) \qquad x(t) = e^{At} f(t), \quad f \text{ καινούργια}$$

$$\Rightarrow \quad x'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{At} f(t)\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} e^{At}\right) f(t) + e^{At} f'(t)$$

$$= A \underbrace{e^{At} f(t)}_{x(t)} + e^{At} f'(t)$$

Έχουμε υποθέσει ότι $x(t)$ επιλύει την (1):

$$\cancel{Ax(t)} + B(t) = \cancel{Ax(t)} + e^{At} f'(t)$$

$$f'(t) = e^{-At} B(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$f(t) = \int_0^t e^{-As} B(s)\, ds + K$$

$$\therefore \quad x(t) = e^{At}\left[\int_0^t e^{-As} B(s)\, ds + K\right]$$

$$= e^{At} K + \int_0^t e^{A(t-s)} B(s)\, ds.$$

$x_0 = x(0) = K$

$\therefore$

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B(s)\,ds.}$$

2. Η Ανισότητα του Gronwall (§2.3, [AK])

Λήμμα 1 (Σύγκριση)

$u(t), v(t)$ επιλύουν αντίστοιχα:

(α) $\dfrac{du}{dt} + p(t)u \leq g(t)$, $u(0) = c$

(β) $\dfrac{dv}{dt} + p(t)v = g(t)$, $v(0) = c$

$t \in [0, a]$, $a \in \mathbb{R}$, $p(t), g(t)$ συνεχείς στο $[0,a]$

Ισχύει ότι

$$u(t) \leq v(t) \quad \text{στο } [0, a]$$

Απ.

$$(\alpha) \to e^{\int_0^t p\,ds}\left[\frac{du}{dt} + p(t)u\right] \leq e^{\int_0^t p}\, g(t) \overset{(\beta)}{=} e^{\int_0^t p\,ds}\left[\frac{dv}{dt} + p(t)v\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\int_0^t p\,ds} u(t)\right] \leq \frac{d}{dt}\left[e^{\int_0^t p\,ds} v(t)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^t \ldots\ldots \leq \int_0^t \ldots\ldots$$

$$e^{\int_0^t p\,ds} u(t) - \cancel{u(0)} \leq e^{\int_0^t p(s)\,ds} v(t) - \cancel{v(0)}, \quad t \in [0, a]$$

$\Box$

Θεώρημα (Ανισότητα Gronwall)

$y(t), z(t)$ ορισμένες στο $[0, T]$, $z(t) \geq 0$

και έστω

$$(*) \quad y(t) \leq \underbrace{c + \int_0^t y(s)\, z(s)\, ds}_{R(t)}, \quad t \in [0, T]$$

c σταθερά

Τότε

$$y(t) \leq c\, e^{\int_0^t z(s) ds}, \quad t \in [0, T].$$

Απ

Θέτουμε $R(t) = c + \int_0^t y(s)\, z(s)\, ds$

$$\frac{dR}{dt} = y(t) z(t) \overset{(*)}{\leq} z(t) R(t), \quad R(0) = c \qquad (z(t) \geq 0)$$

Θεωρούμε τώρα την $v(t)$ που ορίζεται από το Π.Α.Τ.:

$$\frac{dv(t)}{dt} = z(t)\, v(t), \quad v(0) = c$$

Από Λήμμα 1 $\Rightarrow$ $R(t) \leq v(t) = c\, e^{\int_0^t z(s) ds}$

$(*) \Rightarrow$

$$y(t) \leq c + \int_0^t y(s) z(s)\, ds = R(t) \leq c\, e^{\int_0^t z(s) ds}$$

$\square$