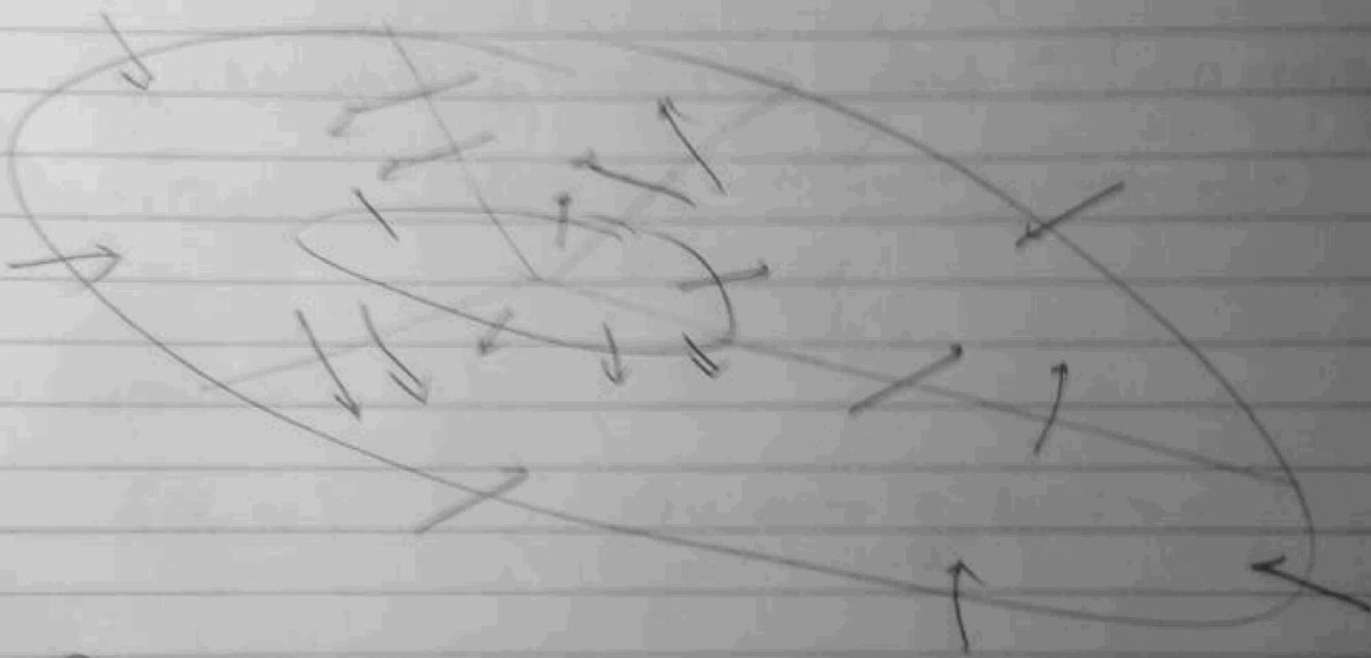
Η (*) δεν επιτρέπει στις λύσεις της (1) με αρχικές συνθήκες εντός του V να εγκαταλείψουν το V σε $t>0$.

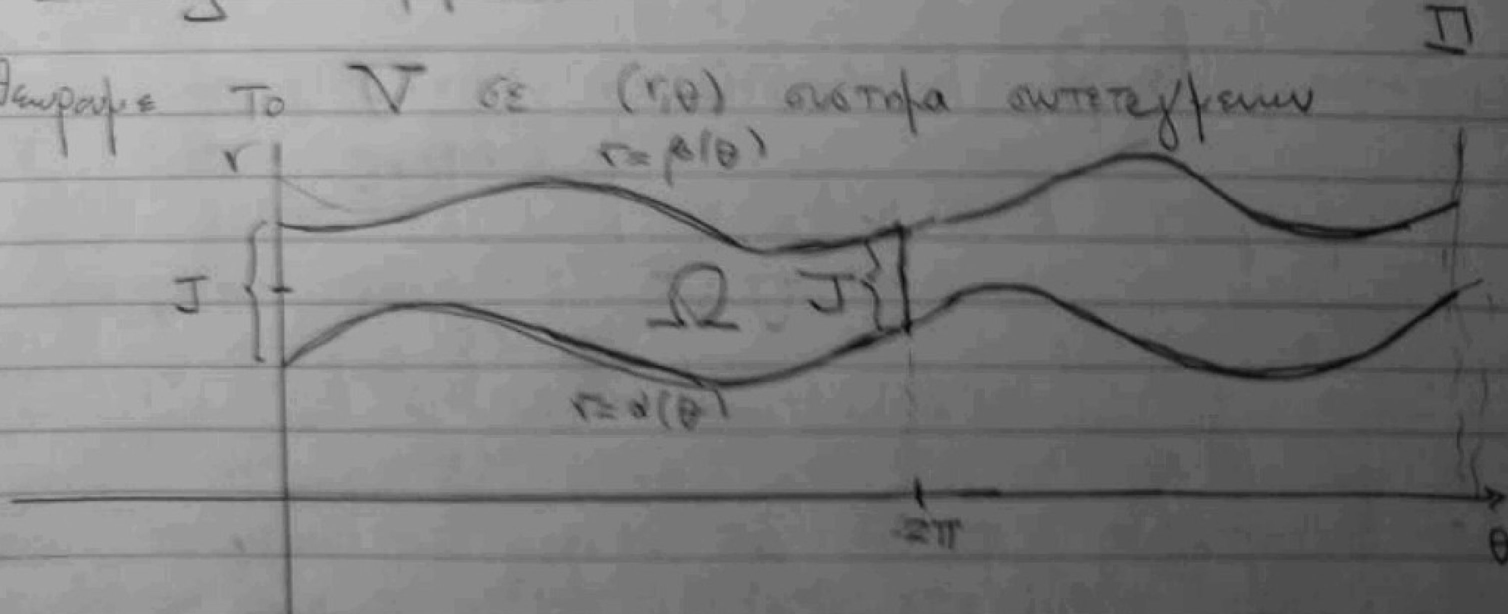
Η (5) δείχνει ότι το Δ.Π. f γυρνάει γύρω-γύρω, αριστερόστροφα αν $f(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}>0$.



<u>Απόδειξη Θεωρήματος 2</u>

II

Θεωρούμε το V σε (r,θ) σύστημα συντεταγμένων



και γράφουμε το (1) σε πολικές ως εξής:

$(x_1(t), x_2(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$

$x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) = f_1(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$

$x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) = f_2(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$

$x_1' = r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = f_1$

$x_2' = r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' = f_2$

Πολλαπλασιάζουμε εξισώσεις με $\cos\theta$, $\sin\theta$ προσθέτουμε, και
— " — " — $\sin\theta$, $\cos\theta$ αφαιρούμε :

$$(6)\begin{cases} r' = g_1(r,\theta) = \cos\theta\, f_1(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\, f_2(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \theta' = g_2(r,\theta) = \dfrac{\cos\theta\, f_2(r\cos\theta, r\sin\theta) - \sin\theta\, f_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} \end{cases}$$

Η υπόθεση (5):

$$(7) \qquad f(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} > 0 \iff g_2(r,\theta) > 0$$

Διαιρούμε τις εξισώσεις στην (6):

$$(8) \qquad \frac{dr}{d\theta} = \frac{g_1(r,\theta)}{g_2(r,\theta)} =: G(r,\theta) \qquad (t \to \theta(t) \text{ αντιστρέψ.})$$

Παρατηρούμε ότι

$$(9) \qquad G(r, \theta + 2\pi) = G(r,\theta).$$

Έχουμε αναγάγει την μελέτη του (6) σε βαθμωτή περιοδική εξίσωση (βλ. §1.4 στο [AK]).

Εστω r^* το σταθερο σημειο

Ισχυρισμος

Η λυση $r(\theta; r^*)$ ειναι 2π- περιοδικη

Αποδειξη Ισχυρισμου

Θετουμε

(10) $$p(\theta) := r(\theta + 2\pi; r^*)$$

Εχουμε

(11) $$\frac{d}{d\theta} p(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(r(\theta + 2\pi; r^*)\right)$$

$$= G\left(r(\theta + 2\pi; r^*), \theta + 2\pi\right)$$

$$= G\left(r(\theta + 2\pi; r^*), \theta\right) \quad \text{(περιοδικοτητα } G\text{)}$$

$$= G\left(p(\theta), \theta\right)$$

Επισης

(12) $$p(0) = r(2\pi; r^*)$$

$$= r^* \quad \text{(Σταθερο σημειο } \Pi\text{)}$$

Μανοσημαντο: $p(\theta) \equiv r(\theta + 2\pi; r^*) \quad \forall \theta$

Επωδος

Επανερχομαστε τωρα στις συντεταγμενες $(x_1(t), x_2(t))$ και δειχνουμε την αντιστοιχη λ-ση.

$$(x_1(t), x_2(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$$

Απο την $\theta' = g_2(r,\theta) > 0$ βγαζουμε οτι η

$t \to \theta(t)$ ειναι αντιστρεψιμη

Εδω δειχνει προσοχη ο συμβολισμος προς αποφυγην συγχυσης. Αλλο $r(t)$ και αλλο $r(\theta)$. Δεν ειναι η ιδια συναρτηση. Εχουμε

$$r(t) = r(\theta(t); r^*)$$

Μπορουμε να υποθεσουμε οτι $r\theta(0)=0$.

Εφοσον $\dfrac{d\theta}{dt} = g_2(r,\theta) > 0 \Rightarrow \exists\, T>0$

τ.ω. $\theta(T) = 2\pi$.

Υπενθυμιζουμε

$$r(0; r^*) = r^*.$$

Εχουμε

$$(x_1(T), x_2(T)) = (r(T)\cos\theta(T), r(T)\sin\theta(T))$$

$$= (r(\theta(T); r^*)\cos\theta(T), r(\theta(T); r^*)\sin\theta(T))$$

$$= \left(r(2\pi; r^*) \cos 2\pi,\ r(2\pi; r^*) \sin 2\pi \right)$$

$$= (r^*, 0) = (x_1(0), x_2(0)).$$

Ισχυρισμός

$$\left(x_1(t+T), x_2(t+T) \right) = \left(x_1(t), x_2(t) \right) \quad \forall t.$$

Απόδειξη

Έστω $y(t) = x(t+T)$

Έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}(t+T) = f(x(t+T))$$
$$= f(y(t))$$

και

$$y(0) = x(T) = x(0)$$

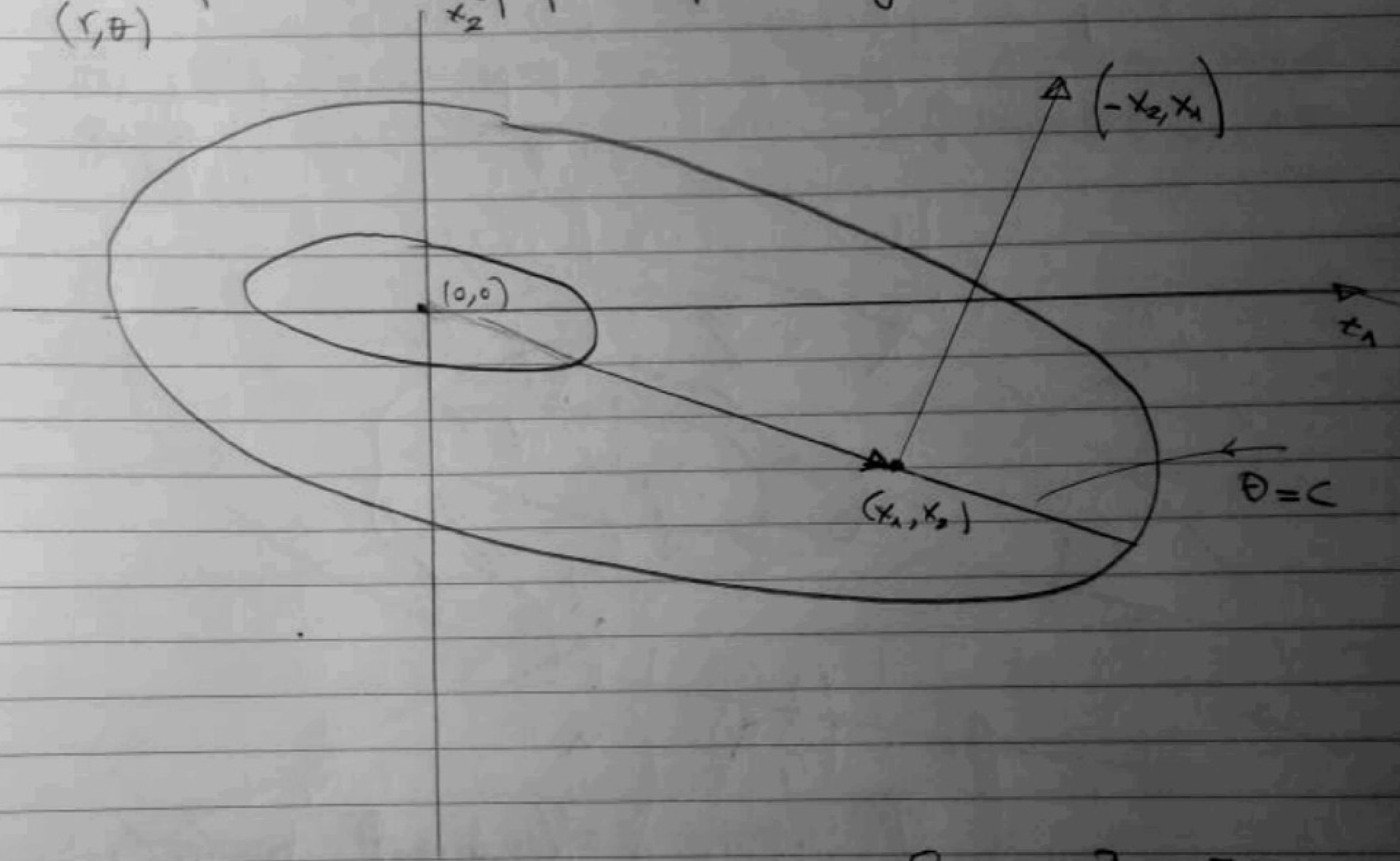
Μοναδικότητα: $y(t) \equiv x(t)$.

Η Απόδειξη του Θεωρήματος 2 είναι πλήρης.

$\square$

Γεωμετρικη Ερμηνεια της (5) και της (*)

Το χωριο U περιγραφεται μεσω πολικων συντεταγμενων (r,θ)



Θεωρειστε το ακτινικο τμημα $\{\theta = c\} \cap U$ (c σταθερα). Εστω $(x_1, x_2) \in$ ακτινικο τμημα. Τοτε το διανυσμα

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

ειναι καθετο. Συνεπως η (5) λεει οτι το Δ.Π. f ποτε δεν εφαπτεται σε ακτινικο τμημα εντος του U. Αρα, λογω συνεχειας, ή $f(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x_1,x_2)\in U$, ή η αντιθετη ανισοτητα.

Χ.β.γ. υποθετουμε οτι $f(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} > 0$.

Απόδειξη (ισχύει στο $\mathbb{R}^n$)

Θεωρούμε την $y(t) := x(t-(t_2-t_1))$

Έχουμε

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t-(t_2-t_1))}{dt} = f(x(t-(t_2-t_1)))$$

$$(4) \qquad = f(y(t))$$

Επίσης

$$y(t_2) = x(t_2-(t_2-t_1)) = x(t_1) = \hat{x}(t_2).$$

Picard - Lindelöf μοναδικότητα $\Longrightarrow$

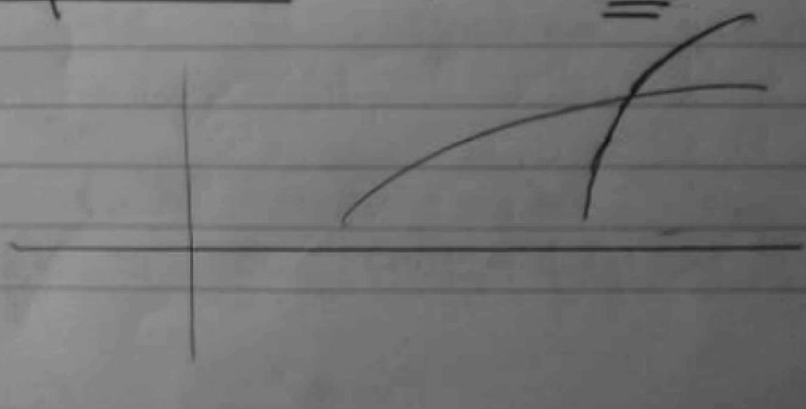
$$y(t) \equiv \hat{x}(t) \iff (3).$$

□

Σημείωση

Η αυτονομία χρησιμοποιείται στην (4). Δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το επιχείρημα αν $f = f(x,t)$.

Σημείωση : Τροχιές δεν τέμνονται. Αν ναι τότε γεωμετρικά ταυτίζονται ως καμπύλες ($x(t-c) = \hat{x}(t)$ $\forall t$) κάποιο c.



Το Θεώρημα των Poincaré και Bendixson

A. Θα μελετήσουμε συστήματα στο επίπεδο

$$(1)\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $f(x) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$

Συμβολίζουμε $x(t;t_0,x_0)$.

$f: \hat{U} \to \mathbb{R}^2$, $\hat{U}$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ($\hat{U} = \mathbb{R}^2$ ειδική περίπτωση).

Ελάχιστη υπόθεση: f τοπικά Lipschitz:

Δοθέντος $V \subset\subset \hat{U}$ ($\bar{V}$ συμπαγές, $\bar{V} \subset \hat{U}$)

$\exists K > 0$, σταθερά, $K = K(V)$, τ.ω.

$$(2) \qquad |f(x) - f(y)| \le K|x-y|, \quad \forall x,y \in V$$

Το Picard-Lindelöf δίνει τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα (βλ 10.4 [AK]).

$\square$

Η (1) είναι αυτόνομη και απόρροια της μοναδικότητας είναι το εξής

Πόρισμα 1

Έστω $x(t;t_0,x_0)$, $\hat{x}(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0)$ λύσεις της (1), που συμβολίζουμε με $x(t)$, $\hat{x}(t)$ αντίστοιχα.

Έστω ότι $\exists\ t_1, t_2$ τ.ω.

$$x(t_1) = \hat{x}(t_2)$$

Τότε

$$(3) \qquad x(t-(t_2-t_1)) = \hat{x}(t)$$

Θεωρουμε την απεικονιση της περιοδου Π: J ⟶ ℝ που αντιστοιχει στο σημειο $r_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$ την τιμη της λυσης $r(2\pi)$ του Π.Α.Τ.

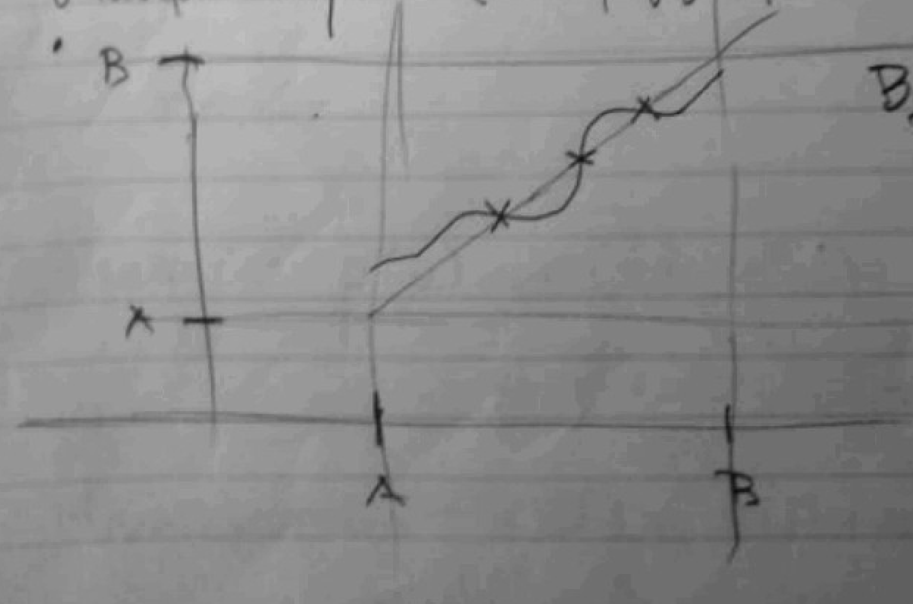
$$(9) \begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} = G(r,\theta) \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

Εφοσον το V ειναι θετικα αναλλοιωτο για την $x' = f(x)$ η λυση παραμενει εντος του V (λογω της ⊕ μεγιστα αποφευγει το ∂V) και κατα συνεπεια υπαρχει και για το (9), για $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$(10) \quad \Pi(r_0) = r(2\pi; r_0)$$

$$\Pi = [\alpha(0), \beta(0)] \longrightarrow [\alpha(2\pi), \beta(2\pi)] = [\alpha(0), \beta(0)]$$

Ο μετασχηματισμος Π ειναι συνεχης μεσω του Θεωρηματος 2.4 [AK] της Συνεχους εξαρτησης ως προς τις αρχικες συνθηκες. Ειναι κλασικο αποτελεσμα οτι καθε συνεχης απεικονιση του [A, B] στον εαυτο του εχει σταθερο σημειο (στις μεγαλυτερες διαστασεις Θεωρημα Brouwer)

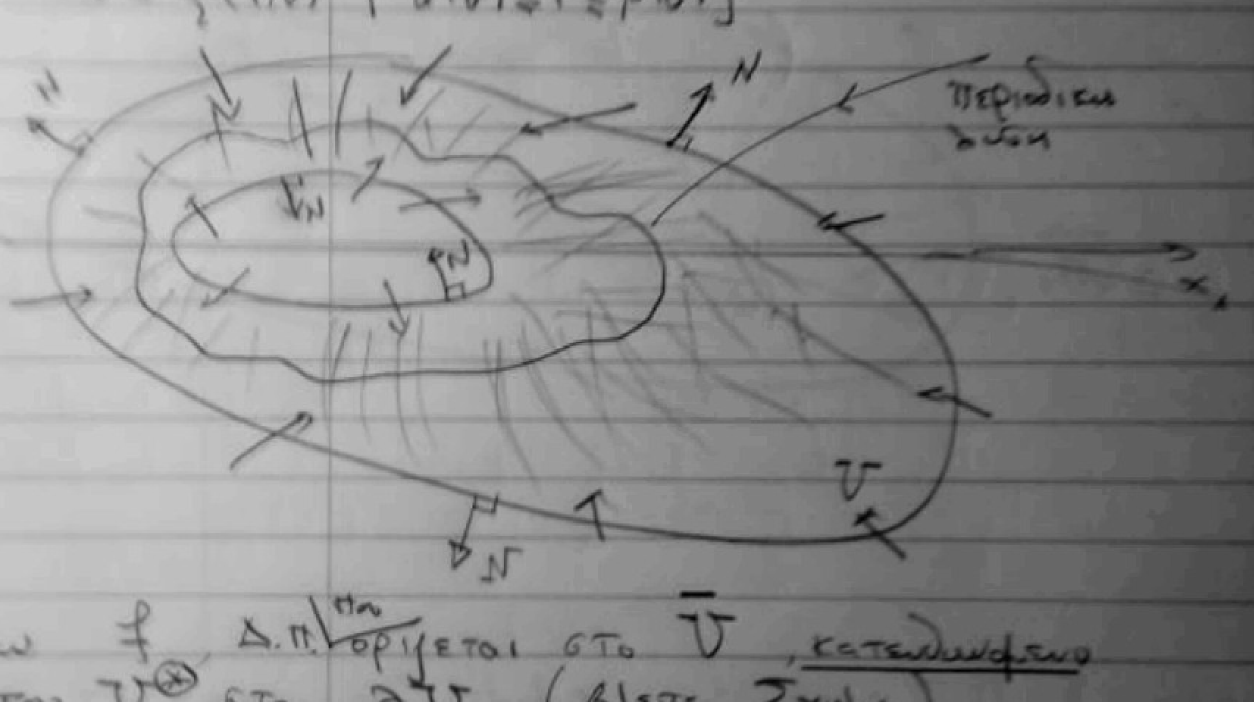


Βλεπε 8.5 #1° [Hubbard + West]

Θεώρημα 3 (Poincaré–Bendixson, η απλή περίπτωση του δακτυλίου)

Έστω $0 < \alpha(\theta) < \beta(\theta)$ 2π-περιοδικές συναρτήσεις, συνεχείς και κατά τμήματα διαφορίσιμες.
Θεωρούμε τον "δακτύλιο"

$$V = \{(r,\theta) \mid \alpha(\theta) \le r \le \beta(\theta)\}$$



και έστω f Δ.Π. που ορίζεται στο $\bar{V}$, κατευθυνόμενο εντός του V (*) στο ∂V (βλέπε Σχήμα).

Αν

$$(5) \qquad f(x_1,x_2) \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad , \ (x_1,x_2) \in V,$$

τότε $\exists$ περιοδική λύση του (1) εντός του V. $\square$

(*) Έστω N μοναδιαίο κάθετο στο ∂V προσανατολισμένο προς τα έξω. Υποθέτουμε $f(x_1,x_2)\cdot N(x_1,x_2) < 0$ (*)