Β. Το Γενικό Θεώρημα Poincaré – Bendixson

Θεώρημα 3 (Η κλασική έκδοση)

Έστω $u(t)$ λύση της

$$(1) \qquad x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

$$f \in C^1(\hat{U}; \mathbb{R}^2), \quad f: \mathbb{R}^2 \supset \hat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Υποθέτουμε ότι η $u(t)$ ορίζεται για $t \geq t_0$, $u(t) \in V \subset\subset \hat{U}$.

$$(13) \qquad \omega(u(t_0)) \cap \{x \mid f(x) = 0\} = \emptyset$$

Τότε $\omega(u(t_0)) =$ Περιοδική Τροχιά

$\square$.

Σημ

Το Θεώρημα 2 λόγω της (5), και του ότι ο "δακτύλιος" είναι θετικά αναλλοίωτος, ικανοποιεί την (13) $\forall$ λύση της (1). Κατά συνέπεια το $\omega(x_0) =$ οριακός κύκλος $=$ περιοδική λύση, $\forall\, x_0 \in \hat{U}$.

$\square$

Υπάρχει και εξαιρετικά ισχυρότερη έκδοση του θεωρήματος.

Θεώρημα 4

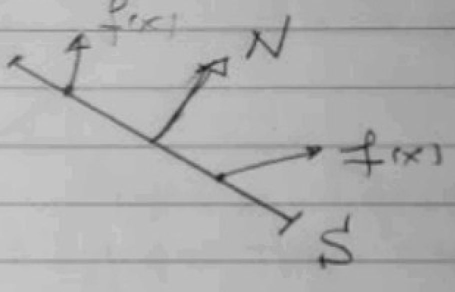
Έστω $\varphi(t, x_0)$, λύση της (1), ορίζεται και φραγμένη για $t > 0$. Τότε ή $\omega(x_0) =$ οριακός κύκλος $=$ περιοδική τροχιά, ή $\forall\, y \in \omega(x_0)$ ισχύει ότι $f\big|_{\alpha(y)} = f\big|_{\omega(y)} = 0$

122

1. Τοπικές Διατομές

Ορισμός:

Ένα ευθύγραμμο τμήμα $S \subset \hat{U}$ λέγεται Τοπική Διατομή αν το Δ.Σ. πεδίο f δεν είναι πουθενά εφαπτόμενο στο S.

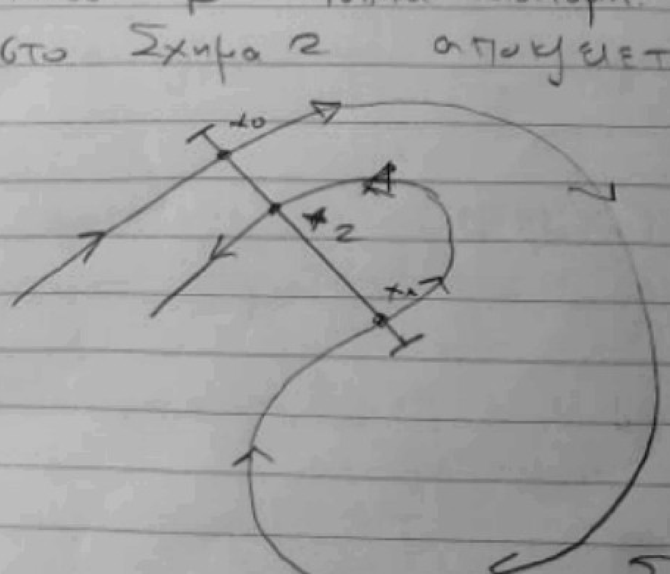


Σχήμα 1

Παρατήρηση 1: Λόγω συνέχειας το πεδίο f θα βλέπει είτε δεξιά, είτε αριστερά. Δηλαδή αν $N \perp S$, σταθερό, τότε είτε $f(x) \cdot N > 0$ $\forall x \in S$, είτε $f(x) \cdot N < 0$ $\forall x \in S$.

Παρατήρηση 2:

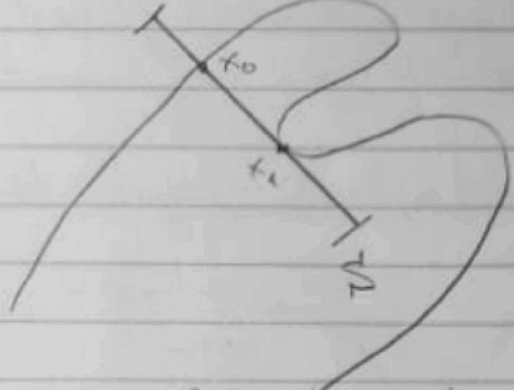
Έστω S Τοπική Διατομή. Το παρακάτω σενάριο στο Σχήμα 2 αποκλείεται διότι αντίστοιχα στο x_0 $f(x_0) \cdot N > 0$ ενώ $f(x_2) \cdot N < 0$.



Σχήμα 2

Παρατηρηση 3:

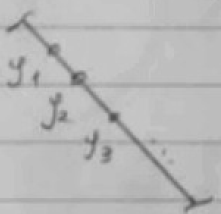
Εστω S Τοπικη Διατομη. Το παρακατω σεναριο στο Σχημα 3 επισης αποκλειεται λογω



$$f(x_1) \cdot N = 0$$

Ορισμος (Μονοτονες Ακολουθιες Σημειων)

Εστω I ενα ευθυγραμμο τμημα στο $\mathbb{R}^2$.



Μια ακολουθια σημειων $y_1, y_2, \dots, y_n,$ ειναι Μονοτονη στο I αν

$$y_n - y_0 = \lambda_n (y_1 - y_0), \quad 1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots <$$

Σημειωση: $\{y_n\}$ μονοτονη $\iff$ y_n μεταξυ y_{n-1} και y_{n+1} στην φυσιολογικη διαταξη στο I.

Ορισμος

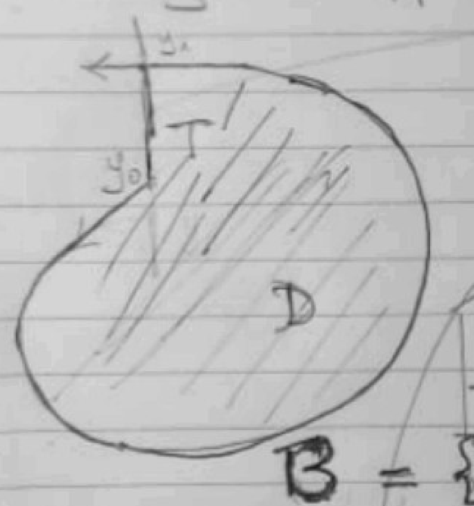
Δοθεισας λυσης $\varphi(t, x_0)$, λεμε $\{x_n = \varphi(t_n, x_0)\}$ μονοτονη ακολουθια κατα μηκος της τροχιας αν

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n \dots$$

2. Λήμμα 5 (Λήμμα Μονοτονίας - Κεφ. 5)

Έστω S τοπική διατομή και y_0, y_1, y_2 σημεία στην S επί της ίδιας τροχιάς $\varphi(t, x_0)$. Αν y_0, y_1, y_2 είναι μονότονη ακολουθία κατά μήκος της τροχιάς, τότε είναι μονότονη στην S.

Απόδειξη Λήμματος



S = διατομή

ανοικτό

όχι αυτοτομές

$$\Sigma = B \cup T \cup \{y_0, y_1\} = \partial D$$

Από Jordan $\Rightarrow$ το ∂D χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο συνεκτικά σύνολα: D φραγμένο, και $\mathbb{R}^2 \setminus D$ μη φραγμένο.

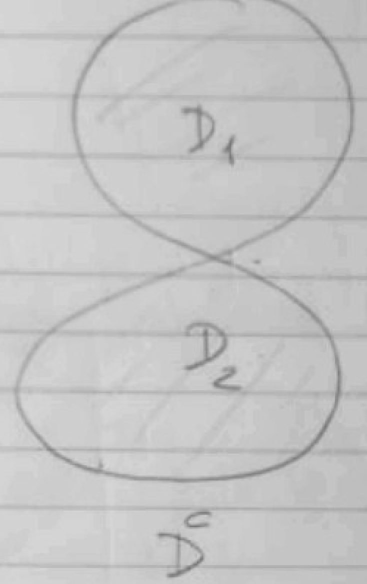
$$B = \{ \varphi(t, x_0) \mid t_0 < t < t_1,\ \varphi(t_0, x_0) = y_0,\ \varphi(t_1, x_0) = y_1 \}$$

Έστω Σ η απλή κλειστή καμπύλη που αποτελείται από το τμήμα B της τροχιάς μεταξύ των y_0 και y_1, και το ευθύγραμμο τμήμα $T \subset S$ μεταξύ y_0 και y_1. Έστω D η φραγμένη κλειστή περιοχή, $\partial D = \Sigma$. Υποθέτουμε ότι η λύση εξέρχεται της D στο y_1 (λόγω Jordan $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D = D \cup D^c$, ανοικτά, συνεκτικά και έπεται ότι όταν διασχίζεις το ∂D αλλάζεις συνιστώσα, βλ (125)). Θα δείξουμε ότι σε κάθε σημείο του T η αντίστοιχη λύση εξέρχεται από το D.

Πρώτον το T δεν εφάπτεται στη τροχιά διότι είναι διατομή. Σε κάθε σημείο του T η αντίστοιχη τροχιά για αυθαίρετο $\varepsilon > 0$, t χρόνος τομής με T, στο $t+\varepsilon$ βρίσκεται ή στο D^c ή στο D. Στο Σχήμα στην σελίδα (124) βλέπουμε ότι αυτό δεν ισχύει για μη απλές καμπύλες.

125

Λόγω συνέχειας ως προς τις αρχικές συνθήκες το υποσύνολο T_- του T όπου η λύση εξέρχεται από το D είναι ανοικτό, και $\neq \emptyset$ λόγω του y_1.



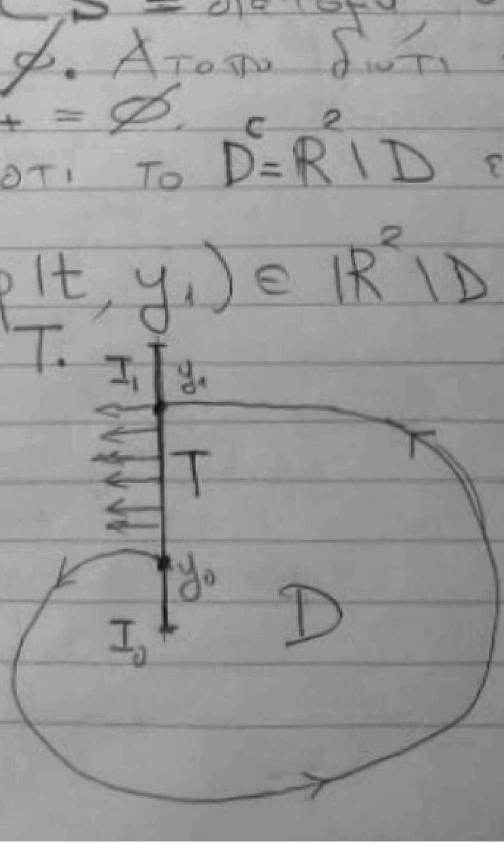
$D = D_1 \cup D_2$, $\partial D = 8$

Για καμπύλες κλειστές με αυτοτομές το Jordan θεώρημα δεν ισχύει. Δεν μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε σημείο του ∂D μια "transversal" ροή είτε βγαίνει, είτε μπαίνει στο D.

Ομοίως το υποσύνολο T_+ του T όπου η λύση εισέρχεται στο D, είναι επίσης ανοικτό. Έχουμε όμως λόγω του ότι $T \subset S$ = διατομή, ότι $T_+ \cup T_- = T$, $T_+ \cap T_- = \emptyset$. Άτοπο διότι το T είναι συνεκτικό! Άρα $T_+ = \emptyset$.

Συμπεραίνουμε ότι το $D^c = \mathbb{R}^2 \setminus D$ είναι θετικά αναλλοίωτο.

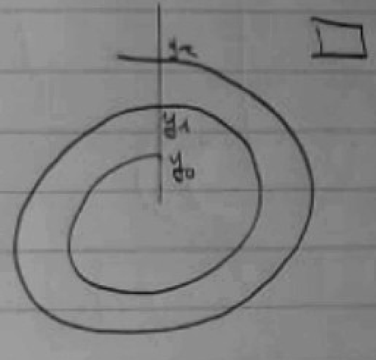
$\Longrightarrow \varphi(t, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ για $t>0$, και κατά συνέπεια $y_2 \in S - T$.



Το σύνολο $S-T$ είναι ένωση δύο διαστημάτων I_0, I_1 με y_0 άκρο του I_0 και y_1 άκρο του I_1

126

I_0 ευρισκεται εντος του D. Κατα συνεπεια $y_2 \in I_1$ διοτι $\varphi(t, y_1) \notin D \quad \forall t>0$. □



3. Αποδειξη Θεωρηματος 4

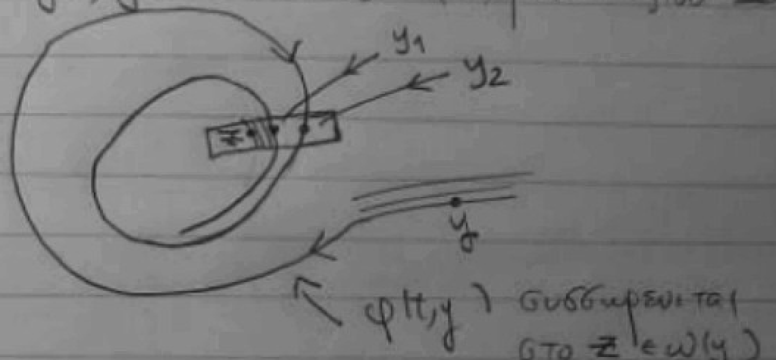
Εστω x τ.ω. $\gamma^+(x)$ φραγμενη, ($\Rightarrow \omega(x) \neq \emptyset$) και εστω $y \in \omega(x)$ και ή $z \in \alpha(y)$, ή $\boxed{z \in \omega(y)}$.
Θεωρουμε πρωτα οτι $f(z) \neq 0$. Θεωρουμε μια διατομη I_z μεσω του z ($\exists$ λογω συνεχειας της f). Υποθετουμε $z \in \omega(y)$.

- Θα δειξουμε οτι

(14) $$\varphi([0,\infty), y) \cap I_z = \{z\}$$

$y \in \omega(x)$ $\varphi(t,y) \in \omega(x)$ $\alpha(y), \omega(y) \subset \omega(x)$
βλ Θ1, σ 99

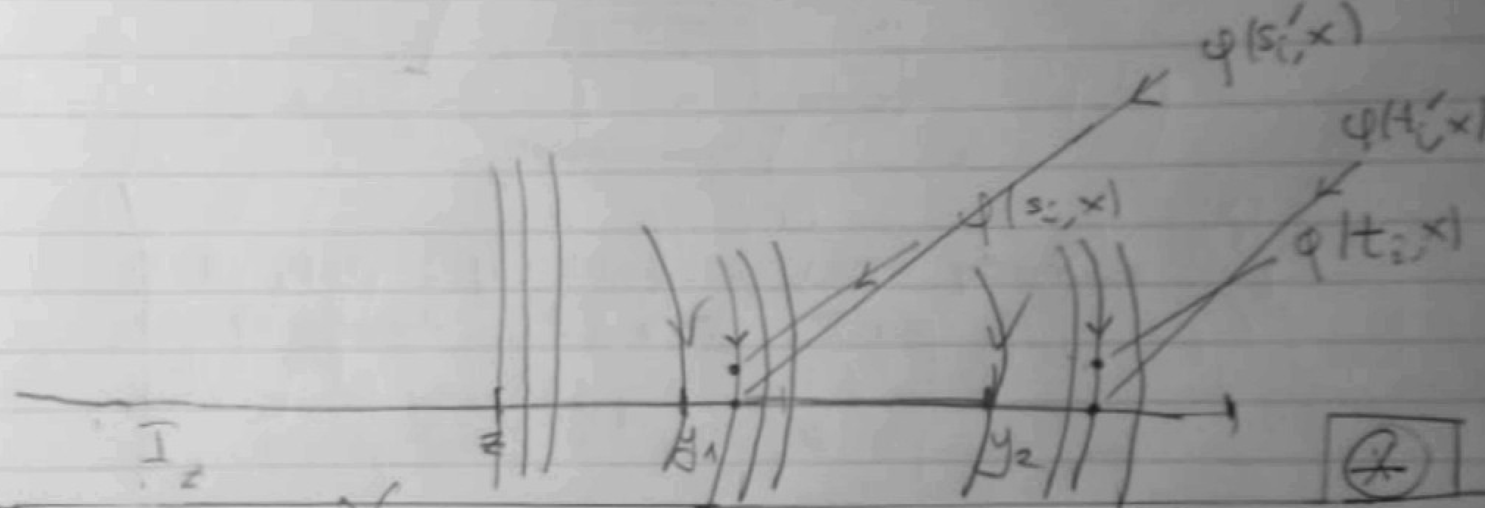
Με εις ατοπον απαγωγη:
Εστω οτι $\varphi([0,\infty), y) \cap I_z \ni y_1, y_2$.
Απο το αναλλοιωτο του $\omega(x)$ επεται οτι $y_1, y_2 \in \omega(x)$. (επομενη σελιδα →)



$y \in \omega(x)$, σημειο συσσωρευσης της $\varphi(t,x)$

$y_1, y_2 \in \omega(x) \Rightarrow \{t_i\}, \{s_i\} \to +\infty$ τ.ω.

$$\varphi(t_i, x) \to y_1, \quad \varphi(s_i, x) \to y_2$$



Έτσι $\exists$ περιοχή N του I_z που κάθε σημείο της $\xi \in N$ έχει την ιδιότητα ότι $\varphi(t(\xi), \xi) \in I_z$, για $|t(\xi)| < \varepsilon$

Κατά συνέπεια $\exists$ ακολουθίες $\{t'_i\}, \{s'_i\}$ με $|t_i - t'_i| < \varepsilon_i$, $|s_i - s'_i| < \varepsilon_i$, έτσι ώστε

$$\varphi(t'_i, x), \ \varphi(s'_i, x) \in I$$

$$\varepsilon_i \to 0 \Rightarrow |\varphi(t_i, x) - \varphi(t'_i, x)| \to 0$$

$$|\varphi(s_i, x) - \varphi(s'_i, x)| \to 0$$

Τώρα μπορούμε να επιλέξουμε τις ακολουθίες $\{t'_i\}, \{s'_i\}$ ως εξής:

$$t'_i < s'_i < t'_{i+1} < s'_{i+1}$$

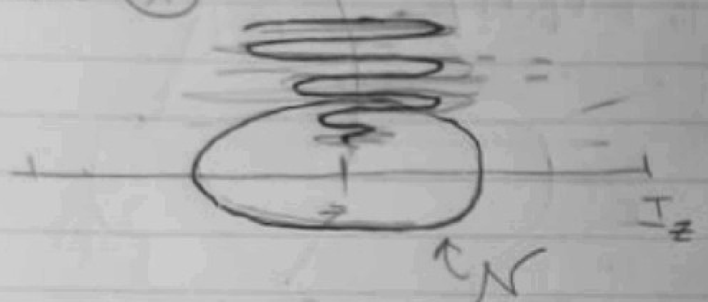
και οδηγούμε σε άτοπο μέσω του Λήμματος 5.

1 2 8

Αποδειξαμε οτι το $\varphi([0,\infty), y) \cap I_z$ εχει το πολυ ενα στοιχειο. Οτι δεν ειναι κενο προκυπτει απο το (*).

- Θα δειξουμε οτι η $\varphi(t,y)$ ειναι περιοδικη

Υπενθυμιζουμε οτι $y \in \omega(x)$, και $z \in \omega(y)$.
Τωρα θεωρουμε περιοχη N του I_z που εχει την ιδιοτητα (*)



Απο την (14) προκυπτει οτι μπορουμε να επιλεξουμε $t_1 < t_2$ τ.ω.

$$\varphi(t_1, y),\ \varphi(t_2, y) \in V.$$

Επισης εφοσον $z \in \omega(y)$ μπορουμε να επιλεξουμε $t_2 - t_1$ οσοδηποτε μεγαλο, $t_2 - t_1 > 1000$.

Θετουμε τωρα $\xi_1 = \varphi(t_1, y)$, $\xi_2 = \varphi(t_2, y)$, και εφαρμοζοντας την (*)

$$\varphi(t(\xi_1), \xi_1) \in I_z, \quad \varphi(t(\xi_2), \xi_2) \in I_z$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t(\xi_1)+t_1, y) = z, \quad \varphi(t(\xi_2)+t_2, y) = z$$

$$|t(\xi_i)| < \varepsilon$$

$$\therefore\ \exists\ t_1' \neq t_2' \quad \text{τ.ω.} \quad \varphi(t_1', y) = \varphi(t_2', y) = z$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t, y) \text{ περιοδικη τροχια}, \quad \varphi(t+T, y) = \varphi(t, y) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$