Σημαντική Διαφορά Ευστάθειας και Συνεχούς Εξάρτησης

Συνεχής Εξάρτηση (Βλέπε Θ 2.4 [AK])

Δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\boxed{\delta = \delta(\varepsilon)}$, και χρόνος T

τ.ω.

(1) $$\|\varphi(t, \bar{x}_0) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad \text{για } t \in [0, T]$$
$$\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$$

Αυτό ισχύει. Προσοχή: $T = T(\varepsilon) < \infty$!

Θεώρημα (Ευστάθεια μέσω γραμμικοποιήσεως)

Έστω

(2) $$\operatorname{Re} \lambda \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} \right) < 0 .$$

Τότε το $\bar{x}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

Απ.

1. Χωρίς βλάβη της γενικότητος υποθέτουμε ότι $\bar{x} = 0$,
δηλ. $f(0) = 0$

Taylor $\Longrightarrow$

(3) $$f(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x + g(x) =: Ax + g(x)$$

όπου

(4) $$g(x) = o(\|x\|) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\|\varphi(t,x_0)\| \leq \|e^{At}x_0\| + \left\|\int_0^t e^{A(t-s)} g(x(s))\,ds\right\|$$

$$\overset{(6)}{\leq} Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \left\|\int_0^t e^{A(t-s)} g(x(s))\,ds\right\|$$

$$\leq Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)} g(x(s))\|\,ds$$

$$\overset{(6)}{\leq} Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)} \|g(x(s))\|\,ds$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\ast\ast \text{ Διευκρίνηση } \ast\ast}$

$$(8)' \quad \overset{(4)'}{\leq} Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t K\underbrace{e^{-\alpha(t-s)}}_{e^{-\alpha t} e^{\alpha s}} m \|\varphi(s,x_0)\|\,ds$$

$\Longrightarrow$

$$(8) \quad e^{\alpha t}\|\varphi(t,x_0)\| \leq K\|x_0\| + \int_0^t Km\, e^{\alpha s} \|\varphi(s,x_0)\|\,ds$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Gronwall:
(σ 61 σημειώσεις μαθήματος)

$\Longrightarrow$

$$(9) \quad e^{\alpha t}\|\varphi(t,x_0)\| \leq K\|x_0\| e^{Kmt} \iff$$

$$(10) \quad \|\varphi(t,x_0)\| \leq K\|x_0\| e^{-(\alpha - Km)t}$$

Ασκησεις Τυπου Μεταβολης Παραμετρων:
1.5, 1.7 απο [ΑΚ]
1c, 1d, 2 σ. 102 of [HS]

** Διευκρινηση **

Η (8′) ισχυει υπο την προυποθεση οτι

(12) $\|x(s)\| < \varepsilon, \quad 0 \leq s \leq t$

$(x(s) = \varphi(s, x_0))$.

Ισχυριζομαστε οτι η (12) ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ $t \geq 0$

Αποδειξη Ισχυρισμου

Ορίζουμε το σύνολο

(13) $X = \{ t \geq 0 \mid \text{η (12) ισχυει} \}$.

- $X \neq \phi$

Πραγματι $x(0) = \varphi(0, x_0) = x_0$. Στον Ορισμο της Ευσταθειας $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta < \varepsilon$. Αρα $0 \in X$.

Απο την ιδιοτητα συνεχειας $t \to \varphi(t, x)$ (βλ ορισμο Δυναμικου Συστηματος σ 52 Σημειωσεων) $[0, \tau) \subset X$ για τ αρκουντως μικρο.

Εστω τωρα οτι

(14) $t^* := \sup X < +\infty$

θα καταληξαμε σε ΑΤΟΠΟ.

Κάνοντας χρήση της ιδιότητος της συνέχειας $t \to \varphi(t,x)$ παίρνουμε ότι

(15) $$\|\varphi(t^*,x_0)\| = \|x(t^*)\| = \varepsilon$$

Για $0 \le t \le t^*$ ισχύει η εκτίμηση (11) που δίνει

(16) $$\|\varphi(t^*,x_0)\| < \varepsilon \text{ , ΑΤΟΠΟ!}$$

Άρα $t^* = +\infty$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα της συνέχισης της λύσης. Συγκεκριμένα αν η λύση μπορεί να συνεχιστεί όσο παραμένει φραγμένη (βλ. σχόλιο σ. 102 [ΑΚ]).

Τώρα η απόδειξη του Θεωρήματος της Ευστάθειας μέσω γραμμικοποίησης είναι πλήρης.

$\square$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΣΤΑΘΕΙΑΣ ΜΕΣΩ ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ορ (Αστάθεια)

Το σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ για το Δ.Σ. $\{\varphi(t,x)\}$ είναι ΑΣΤΑΘΕΣ αν δεν είναι ευσταθές. □

Εξηγήσεις: $\varphi(t,\bar{x}) = \bar{x} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Η άρνηση της ευστάθειας του $\bar{x}$ σημαίνει την ύπαρξη κάποιου $\eta > 0$, φιξαρισμένου τ.ω.

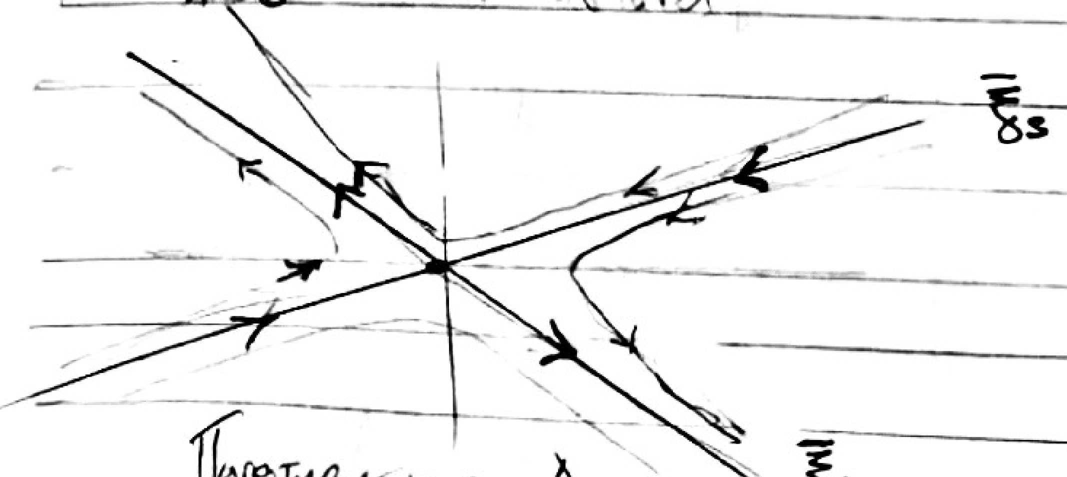
$\forall \hat{\delta} > 0 \ \exists \ x_0$, αρχική τιμή, $\|x_0 - \bar{x}\| < \hat{\delta}$

με την ιδιότητα ότι για κάποια χρονική $t > 0$ στιγμή $t = t(x_0)$, η λύση $\varphi(t, x_0)$ είναι τουλάχιστον $\eta > 0$ μακριά από το $\bar{x}$:

$$\|\varphi(t(x_0), x_0) - \bar{x}\| \geq \eta.$$

(αυθαίρετα κοντά αρχικές συνθήκες εξελίσσονται η-μακριά από το $\bar{x}$)

Για τα Γ.Σ. που έχουν σαγματική δομή το $\bar{x} = 0$ είναι ασταθές



Παρατήρηση: Δεν απομακρύνονται όλες οι λύσεις!

Θεώρημα (Αστάθεια μέσω γραμμικοποίησης)

Έστω ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει μία ιδιοτιμή λ_i με $Re\,\lambda_i > 0$. Τότε το $\bar{x}$ είναι ασταθές.

Απόδειξη

(1) $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, $\quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \ t \in \mathbb{R}$

$f : U \to \mathbb{R}^2, \ U \subseteq \mathbb{R}^2$, ανοικτό

$f(\bar{x}) = 0$, $\quad f \in C^1(U, \mathbb{R})$

$$x' = Ax, \quad A = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \text{ στο } \bar{x}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\bar{x} = 0$, δηλ. $f(0) = 0$

ΟΛΕΣ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ ~~$x(t) \equiv 0$~~ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΟΝΤΑΙ

Περίπτωση (i): $Re\,\lambda_1 > 0, \ Re\,\lambda_2 > 0$

Αλλαγή φοράς του χρόνου:
Θέτουμε $\tau = -t$, $\quad z(\tau) := x(-\tau)$,

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\big(x(-\tau)\big) = \frac{d}{d(-\tau)}\big(x(-\tau)\big)\frac{d(-\tau)}{d\tau}$$

$$\overset{(1)}{=} f(x(-\tau))\,(-1)$$

$= -f(z(\tau))$

$\therefore$

$$(2) \quad \frac{dz}{d\tau} = -f(z) =: h(z)$$

$$h(0) = -f(0) = 0$$

$$\frac{\partial h(0)}{\partial z} = -\frac{\partial f(0)}{\partial x} = -A =: B$$

Αντιστοιχο γραμμικο

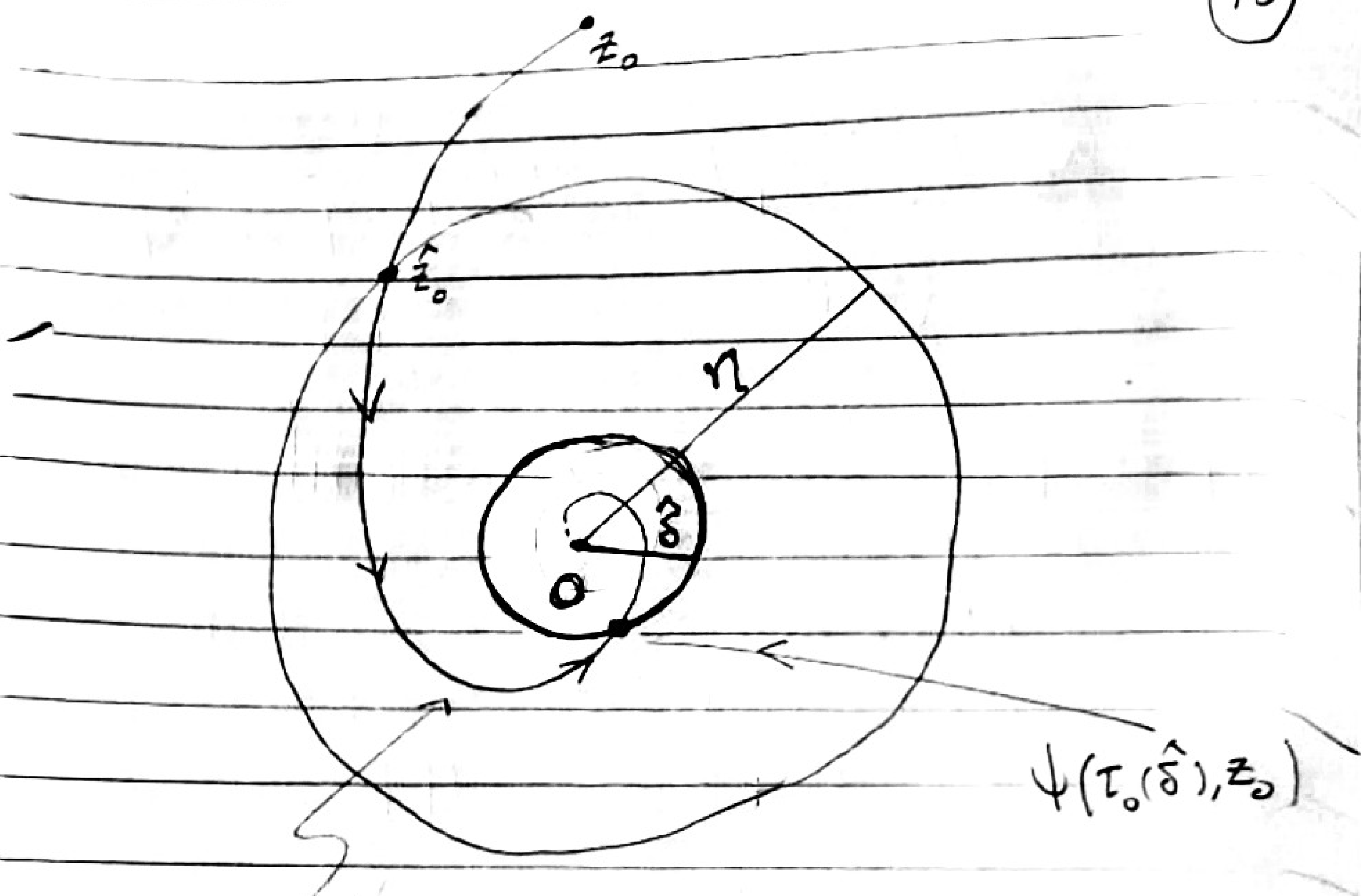
$$(3) \quad \frac{dz}{d\tau} = -Az = Bz$$

Οι ιδιοτιμες του B, $\mu_1 = -\lambda_1$, $\mu_2 = -\lambda_2$

Εφαρμοσαμε το θεωρημα ασ. ευσταθειας στο (2). Συμβολισαμε με $\psi(\tau, z_0)$ την λυση του (2) με Α.Σ. $z(0) = z_0$
Συμπεραιναμε οτι $\exists\ \delta_0 > 0$ τ.ω.

$$(4) \quad \|z_0 - 0\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{\tau \to +\infty} \psi(\tau, z_0) = 0$$

Φιξαραμε $\eta = \frac{\delta_0}{2}$, και επιλεγουμε $\hat{z}_0$, $\|\hat{z}_0 - 0\| = \eta$



$$\psi(\tau, z_0) \longrightarrow 0 \quad , \tau \longrightarrow +\infty$$

Δοθέντος $\hat{\delta} > 0$, αυθαίρετα μικρού, $\exists \ \tau_0 = \tau_0(\hat{\delta})$ τ.ω.

$$\|\psi(\tau_0(\hat{\delta}), z_0)\| = \hat{\delta}$$

Λύνουμε την (1) με αρχική συνθήκη $\psi(\tau_0(\hat{\delta}), z_0)$

Η $\varphi(t, \psi(\tau_0(\hat{\delta}), z_0))$ αντιστρέφει την ροή,

$\Rightarrow \exists$ χρόνος t^* τ.ω.

$$\varphi(t^*, \psi(\tau_0(\hat{\delta}), z_0)) = \hat{z}_0$$

ΑΣΤΑΘΕΙΑ!

Περίπτωση (iii) : $\lambda_1 \leq 0 < \lambda_2$

(1) $x' = f(x) = Ax + g(x)$, $A = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}\right)$

g όπως στην σ. 64

A διαγωνοποιήσιμος:

$x = Pz$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Αλλαγή μεταβλητών

$x = Pz \Rightarrow x'(t) = Pz'(t)$

$x'(t) = Ax + g(x) = APz + g(Pz)$

$\therefore$

(2) $z' = (P^{-1}AP)z + P^{-1}g(Pz) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \hat{g}(z)$

$\hat{g}(z) := P^{-1}g(Pz)$

Παρατηρήσεις

1. $\|\hat{g}(z)\| = \|P^{-1}g(Pz)\| \leq \|P^{-1}\| \|g(Pz)\|$

$= \|P^{-1}\| \, o(\|Pz\|)$

$\leq \|P^{-1}\| \|P\| \, o(\|z\|)$

$= o(\|z\|)$

2. $\|x\| = \|Pz\| \leq \|P\| \|z\|$ (i)

$\|z\| = \|P^{-1}x\| \leq \|P^{-1}\| \|x\|$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ $\|z\| << 1 \Rightarrow \|x\| << 1$

(ii) $\Rightarrow$ $\|z\| = \eta \Rightarrow \|x\| \geq \dfrac{1}{\|P^{-1}\|}\eta$

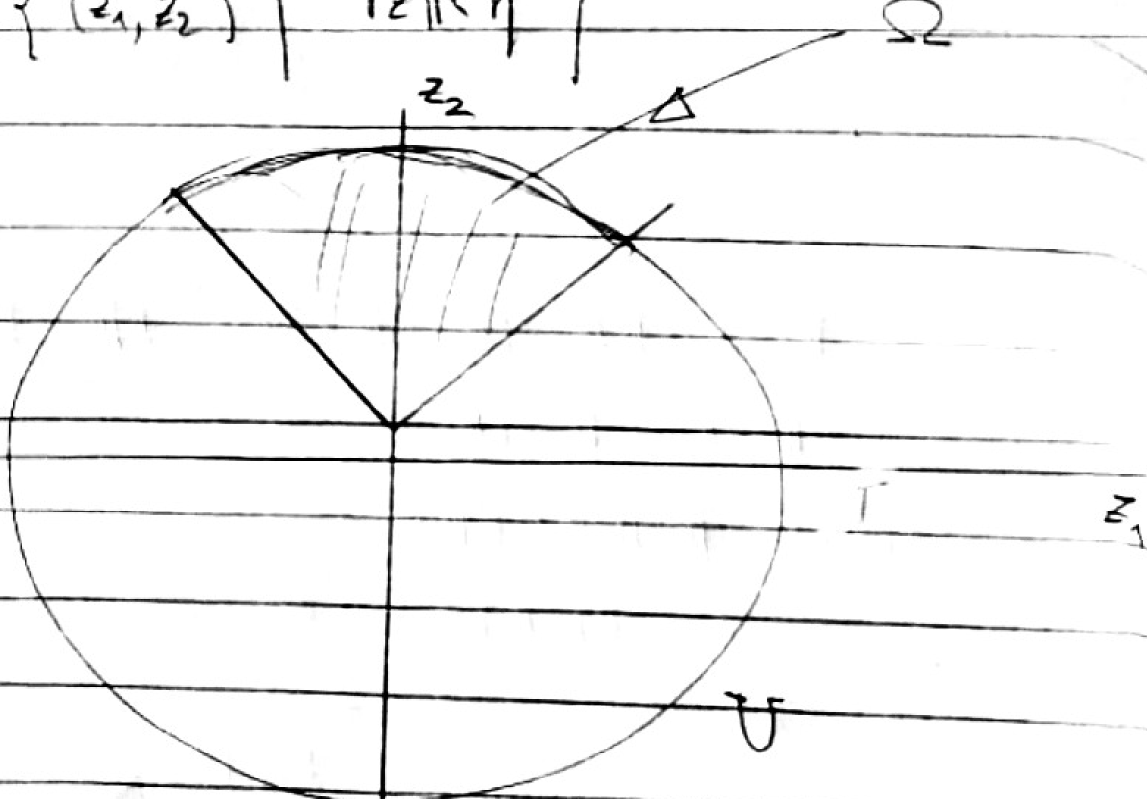
Συμπέρασμα: Η ευστάθεια / αστάθεια σε x-συντεταγμένες

$\Leftrightarrow$ " — " σε z — " " —

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = \lambda_1 z_1 + \hat{g}_1(z_1, z_2) \\ z_2' = \lambda_2 z_2 + \hat{g}_2(z_1, z_2) \end{cases} \qquad (3)$$

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \mid z_2 > |z_1|\}$$

$$U = \{(z_1, z_2) \mid \|z\| < \eta\}$$



Επιλογή:

$\|g(x)\| \leq m\|x\|$ για $\|x\| \leq \eta$, $\lambda_2 - \lambda_1 - 4m > 0$

(*) ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ – ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ

Η Διευκρίνηση επ' αυτού στην σελίδα (63) δεν είναι ακριβής. Η σωστή εξήγηση είναι ως εξής:

Από την ιδιότητα συνέχειας

$(t,x) \longrightarrow \varphi(t,x)$

προκύπτει αν $t \to \varphi(t,x_0)$ για λύση, $0 \le t \le T$, $T>0$, τότε δοθέντος $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ τ.ω.

$$\|\varphi(t,x_0) - \varphi(t,x)\| < \varepsilon$$

για $t \in [0,T]$ και $\|x - x_0\| < \delta$.

Εξειδικεύοντας το $x_0 = \bar{x}$, σημείο ισορροπίας, τότε

$$\|\varphi(t,x) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad t \in [0,T],$$

για $\|x - \bar{x}\| < \delta$.

Σημειώνουμε ότι το $\delta = \delta(\varepsilon, T)$.
Επίσης σημειώνουμε ότι ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ για $T=\infty$, και αυτό απορρέει από το γνωστό Θεώρημα ότι αν $(t,x) \longrightarrow f(t,x)$ συνεχής, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ΣΥΜΠΑΓΗ!

ΘΑ ΔΕΙΞΟΥΜΕ ΟΤΙ ΟΛΕΣ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ (3) ΜΕ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟ $\Omega \cap U$ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\Omega \cap U$ ΜΕΧΡΙΣ ΟΤΟΥ ΤΜΗΣΟΥΝ ΤΟ ΣΥΝΟΡΟ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ U.

$\Rightarrow$ Αστάθεια για το (3)

$\Rightarrow$ Αστάθεια για το (1).