Θεωρήσαμε λοιπόν υπόρρητα ότι

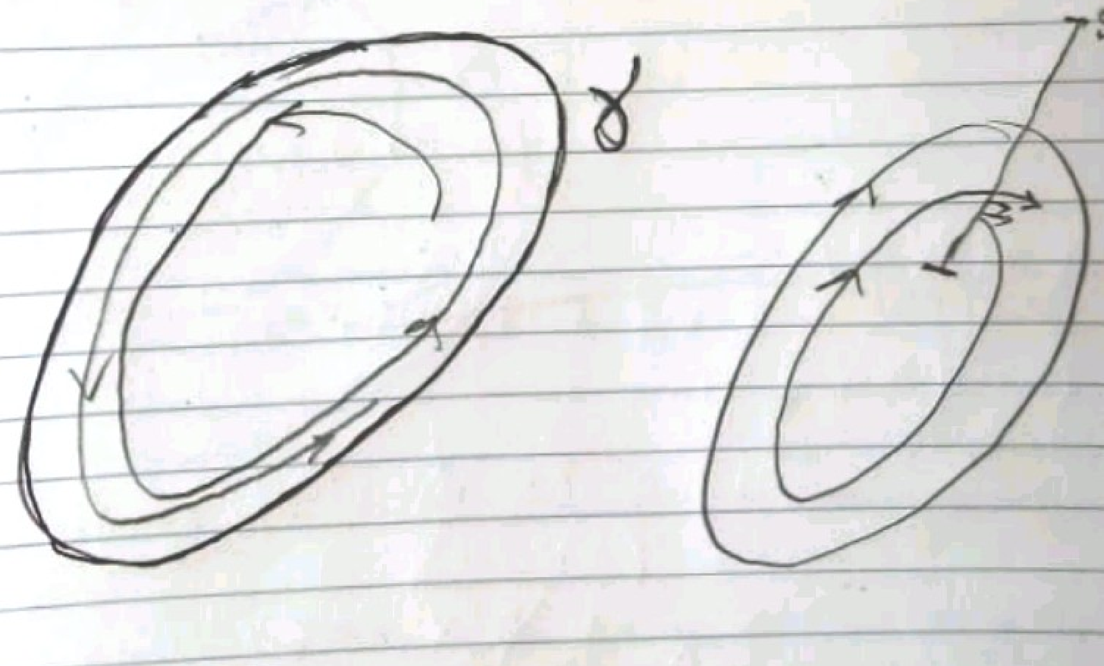
$$x_0 \notin \gamma,$$

και δείξαμε ότι

(3) $$\lim_{t \to \infty} d(\varphi(t, x_0), \gamma) = 0 .$$

Μάλιστα δείξαμε μονοτονική σύγκλιση σε τοπικές διατομές κεντραρισμένες σε αυθαίρετο $z \in \gamma$.

Δείξαμε λοιπόν ότι σε αυτή την περίπτωση η γ είναι οριακός κύκλος και ότι έχει μια πλήρη ασυμπτωτική ευστάθεια:



Προταση 1

Εστω γ οριακος κυκλος, $\gamma = \omega(x_0)$, $(x_0 \notin \gamma)$
Τοτε $\exists$ ανοικτη περιοχη $V \ni x_0$
τ.ω.

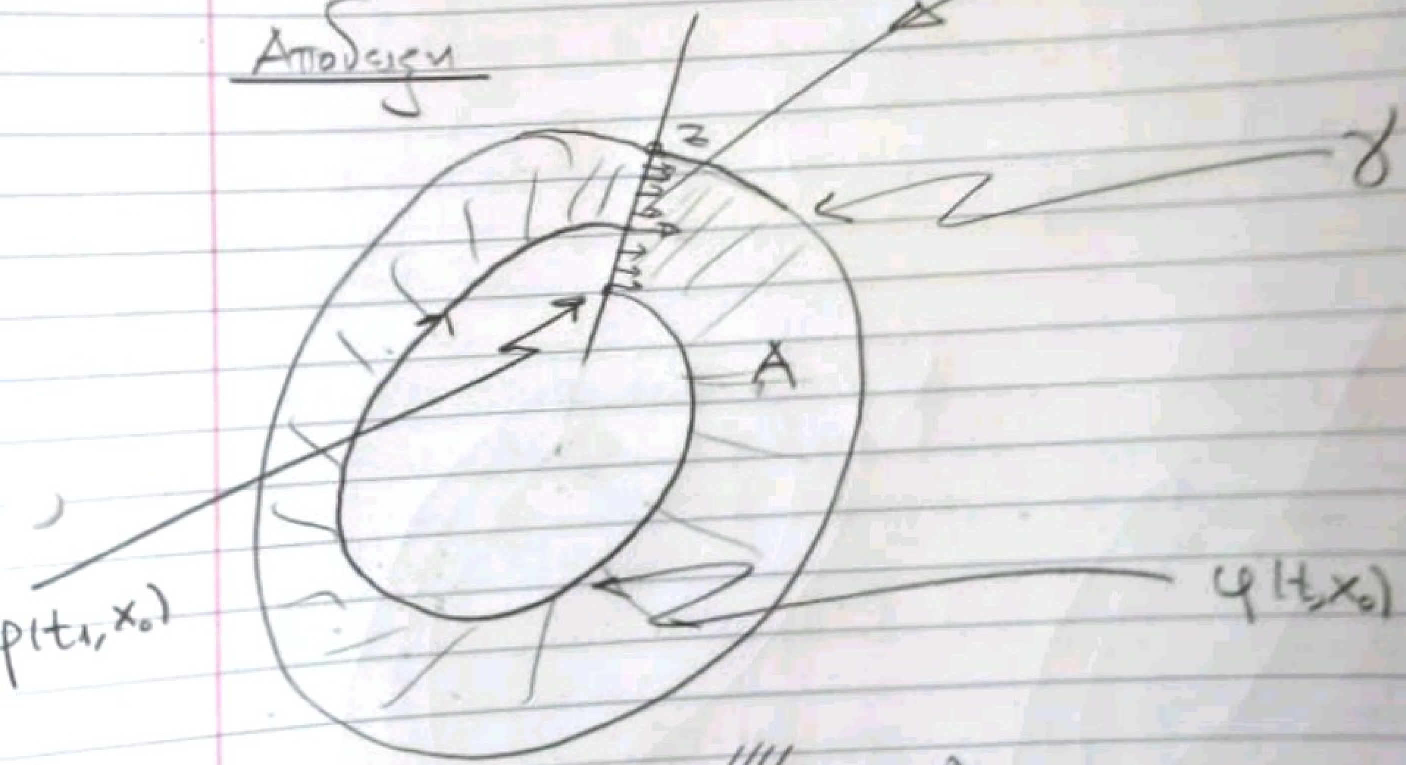
$$\gamma = \omega(y) \quad \forall y \in V.$$

Δηλαδη το

(4) $$A = \{ y \mid \omega(y) = \gamma \} - \gamma$$

ειναι ανοικτο.

Αποδειξη



1. Το $A - \gamma$ = //// θετικα αναλλοιωτο
2. Για y δ-κοντα στο x_0, απο συνεχη εξαρτηση στο αρχικες, $[0, t_2 + \varepsilon]$, $(\varepsilon > 0, \delta = \delta(\varepsilon))$ εχαμε οτι

$$\varphi(t_2 + \varepsilon, y) \in A.$$

3. Έπεται ότι

$$\varphi(t,y) \in A, \quad t \geq t_0 + \varepsilon$$

4. Η $\varphi(t,y)$ γίνεται "sandwiched" μεταξύ της $\varphi(t,x_0)$ και της γ, οπότε αναγκαστικά

(5) $$\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t,y),\gamma) = 0.$$

Η Απόδειξη είναι πλήρης.

□

Θεώρημα 2

Ένα μη κενό, συμπαγές, θετικά (αρνητικά) αναλλοίωτο σύνολο περιέχει ή σημείο ισορροπίας, ή οριακό κύκλο, ή είναι ένωση περιοδικών τροχιών.

Απόδειξη

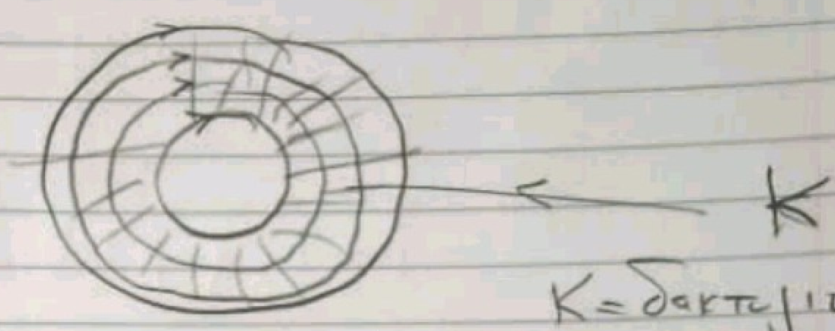
Έστω $x \in K$. Έπεται ότι $\omega(x) \neq \emptyset$.
Έστω ότι $\omega(x) \cap \{\text{σημεία ισορροπίας}\} = \emptyset$.
Τότε

$$\omega(x) = \gamma$$

Αν $x \notin \gamma$ τότε έχουμε οριακό κύκλο.
Αν $\forall x \in K$, $x \in \omega(x) = \gamma$, τότε το K είναι ένωση περιοδικών τροχιών (κλειστών τροχιών)

Σχόλιο

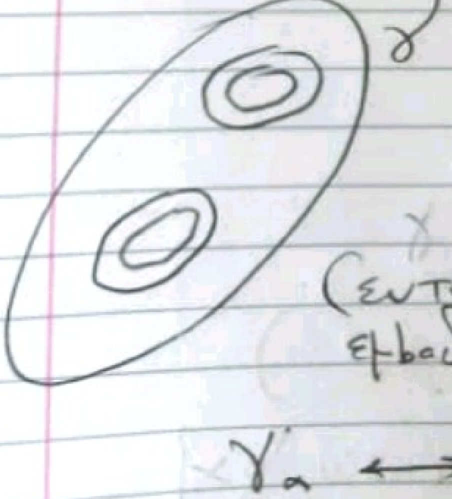
Η περίπτωση γραμμικών συστημάτων με επίπεδο φάσης κέντρο είναι παράδειγμα ένωσης περιοδικών τροχιών.



Θεώρημα 3

Έστω γ περιοδική τροχιά που περιέχει το ανοικτό U. Το U αναγκαστικά περιέχει σημείο ισορροπίας (Σ.Ι.).

Απόδειξη



Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι ∄ Σ.Ι. στο U. Θεωρούμε όλες τις κλειστές τροχιές εντός της γ (εντός του U) και τα αντίστοιχα εμβαδά που περιέχουν:

$$\gamma_\alpha \longleftrightarrow A_\alpha$$

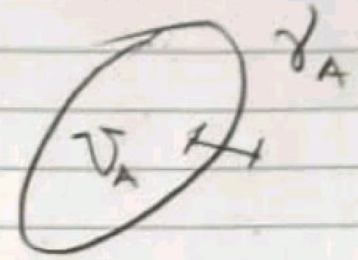
Έστω

$$\Rightarrow \quad A = \inf_{\alpha} A .$$

Απο την υποθεση του ατοπου

$$A \neq \emptyset$$

Εστω γ_A μια τετοια κλειστη τροχια.



Αναγκαστικα για $x \in U_A$, $\omega(x) = \gamma_A$, και $\alpha(x) \neq \gamma_A$. Απο Poincaré-Bendixson $\alpha(x)$ περιοδικη τροχια. Ατοπο διοτι περιεχει μικροτερο εμβαδον απο την γ_A.

$\square$