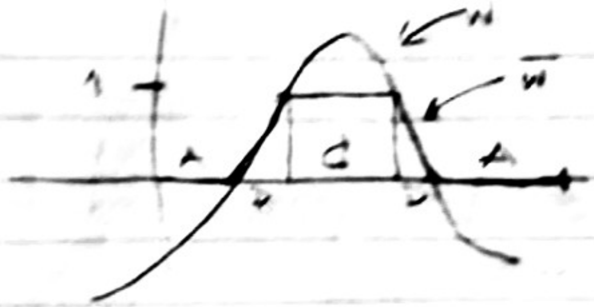
Lemma (De Giorgi)



$$\int_{B_1} |\nabla w_+|^2 \, dx \le C_0$$

$$|A| = |\{w \le 0\} \cap B_1|$$

$$|C| = |\{w \ge 1\} \cap B_1|$$

$$|D| = |\{0 < w < 1\} \cap B_1|$$

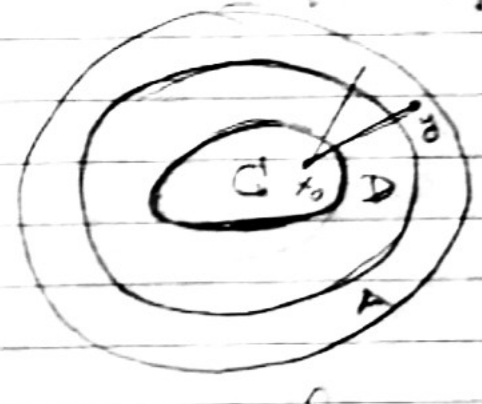
Claim $\quad C_0 |D| \ge \left(|S^{n-1}_+|^{-1} |A| |C|^{1-\frac{1}{n}} \right)^2$

$$= \left(|A| \left(\frac{|C|}{|S^{n-1}_+|} \right) \right)$$

Pf

$\bar w = \sup(0, \inf(w, 1))$

$\nabla \bar w = (\nabla w_+) \mathbb{1}_{\{0 < w < 1\}}$



polar coordinates w.r.t. $\boxed{x_0}$

$$1 = \bar w(x_0) = \int \bar w_r \, dr \le \int \frac{|\nabla \bar w| r^{n-1}}{r^{n-1}} \, dr$$

$$\int_A dy \le \iint \frac{|\nabla \bar w| \cdot r^{n-1} \, dr \, d\sigma}{r^{n-1}} = \int_A \frac{|\nabla \bar w|}{|x_0 - y|^{n-1}} \, dy$$

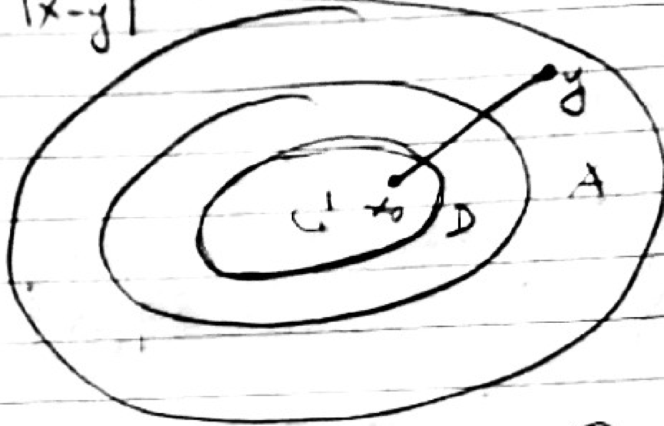
$$|A| \le \int_D \frac{|\nabla w_+|}{|x_0 - y|^{n-1}} \, dy \qquad \int_D \frac{|\nabla \bar w|}{|x_0 - y|^{n-1}} \, dy$$

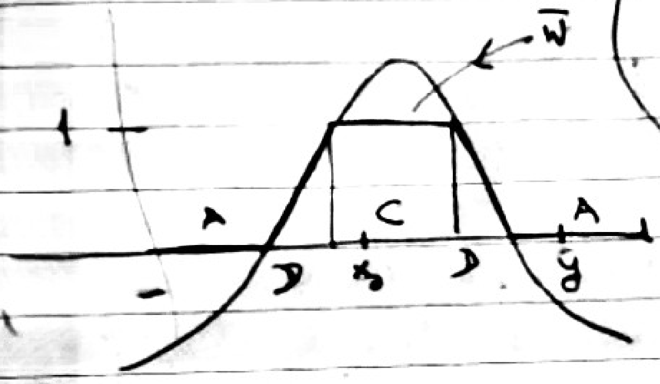
$$\Rightarrow |A| \int_C dx_0 \le \int_D |\nabla w_+(y)| \left(\int_C \frac{dx_0}{|x_0 - y|^{n-1}} \right) \qquad \int_D \frac{|\nabla w^+|}{|x_0 - y|^{n-1}} \, dy$$

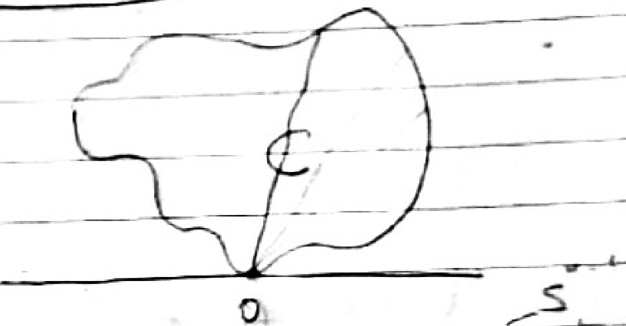
$$|A||C| \le \int |\nabla w_+(y)| \left(\int \frac{dx_0}{|x_0 - y|^{n-1}} \right) dy$$

$$|A||C| \le \int_D |\nabla w_\pm(y)| \left(\int_C \frac{dx_0}{|x_0 - y|^{n-1}} \right) dy$$

$$\frac{1}{|C|} \int_C \frac{dx}{|x-y|^{n-1}}$$







$$\frac{1}{|C|} \int_C \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} = \frac{1}{|C|} \int_{C-y} \frac{dz}{|z|^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{|\hat{C}|} \int_{\hat{C}} \frac{dz}{|z|^{n-1}} \qquad \hat{C} = \left\{ (\sigma, \rho) \;\middle|\; 0 < \rho < r(\sigma),\ \sigma \in S_+^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{|\hat{C}|} \int_{S_+^{n-1}} \int_0^{r(\sigma)} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-1}} \, d\rho \, d\sigma \qquad |\hat{C}|$$

$$= \frac{1}{|\hat{C}|} \int_{S_+^{n-1}} r(\sigma) \, d\sigma \le \frac{1}{|\hat{C}|} \left(\int_{S_+^{n-1}} r^n(\sigma) \, d\sigma \right)^{1/n} |S_+^{n-1}|^{1-\frac{1}{n}}$$

③

$$\leq |S_+^{n-1}|^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{|\hat{C}|^{\frac{1}{n}}} |\hat{C}| = |S_+^{n-1}|^{1-\frac{1}{n}} |C|^{\frac{1}{n}-1}$$

$\therefore$

$$|A| \leq \left(\int_D |\nabla w_+(y)| \, dy\right) |S_+^{n-1}|^{1-\frac{1}{n}} |C|^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\leq \left(\int_D |\nabla w_+|^2 dy\right)^{1/2} |D|^{1/2} |S_+^{n-1}|^{1-\frac{1}{n}} |C|$$

$$\leq C_0^{1/2} |D|^{1/2} |S_+^{n-1}|^{1-\frac{1}{n}} |C|^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 |D| \geq \left(\frac{|A|}{|S_+^{n-1}|^{1-\frac{1}{n}}}\right)^2 \left(|C|^{1-\frac{1}{n}}\right)^2}$$

$\square$

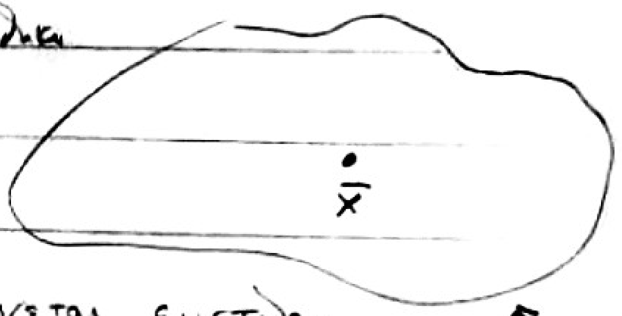
Ορ (Ευστάθεια – Ασυμπτωτική Ευστάθεια)

Έστω

$$(1)\quad \begin{cases} x' = f(x), \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad f : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\bar{x}\,\in}{\cup\!\!\!\!\!\!\!\;\;U \subseteq}} \to \mathbb{R}^n \\ f(\bar{x}) = 0 \qquad\qquad f \in C^1(U; \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

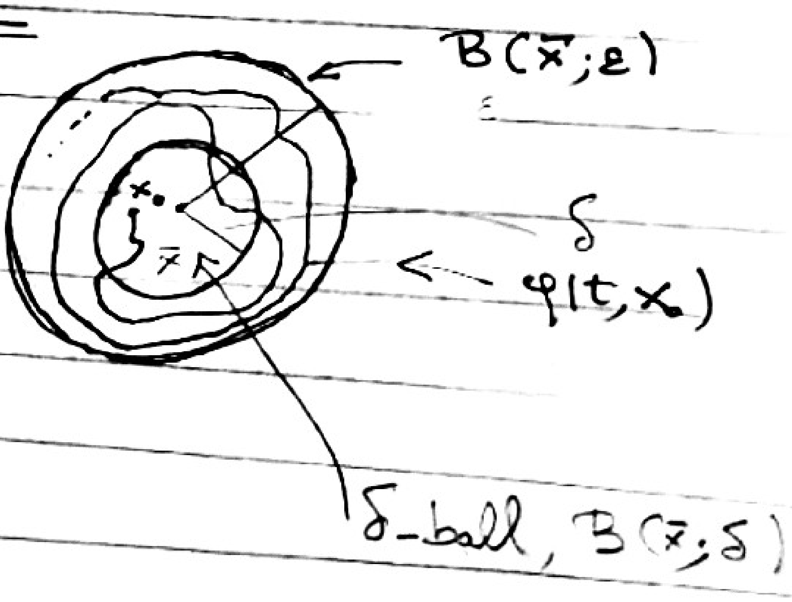
$x(t) = \varphi(t, x_0)$, λύση με Αρχική Συνθήκη

$$x(0) = x_0$$



$\bar{x}$, Σημείο Ισορροπίας, λέγεται <u>ευσταθές</u> αν δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon)$, τ.ω. αν $\|\bar{x} - x_0\| < \delta \implies \|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$

<u>για $t \geq 0$</u>



Το $\bar{x}$ λέγεται <u>ασυμπτωτικά ευσταθές</u> αν είναι <u>ευσταθές</u> και επιπλέον

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x}.$$

Σημαντική Διαφορά Ευστάθειας και Συνεχούς Εξάρτησης

Συνεχής Εξάρτηση (Βλέπε Θ 2.4 [ΑΚ])

Δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon)$, και χρόνος $T = T(\varepsilon)$, τ.ω.

$$\| \varphi(t, \bar{x}_0) - \bar{x} \| < \varepsilon, \quad \text{για} \quad t \in [0, T].$$

Αυτό ισχύει. Προσοχή: $T = T(\varepsilon) < \infty$!

Θεώρημα (Ευστάθεια μέσω γραμμικοποίησης)

Έστω

$$(2) \qquad Re\,\lambda\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}\right) < 0,$$

Τότε το $\bar{x}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

Απ.

1. Χωρίς βλάβη της γενικότητος υποθέτουμε ότι $\bar{x} = 0$, δηλ. $f(0) = 0$

Taylor $\Longrightarrow$

$$(3) \qquad f(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x + g(x) =: Ax + g(x)$$

όπου

$$(4) \qquad g(x) = o(\|x\|) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$$

Γνωρίζαμε ότι για το

(5) $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, $\mathrm{Re}\,\lambda(A) < 0$

ισχύει η εκτίμηση (βλ. Παράδειγμα 10.8 και Απόδειξη στις σημειώσεις του μαθήματος μας σ. 30)

(6) $\|e^{At}x_0\| \leq Ke^{-\alpha t}\|x_0\|$, $t \geq 0$

Υπενθυμίζαμε ότι $\forall\, \alpha < \mathrm{Re}\,\lambda(A)$ $\exists\, K = K(\alpha)$, σταθερά, τ.ω. η (6) ισχύει.

Επίσης από την (4) προκύπτει ότι δοθέντος $m > 0$ $\exists$ $\varepsilon > 0$ τ.ω.

(4)' $\dfrac{\|g(x)\|}{\|x\|} < m$ για $\|x\| < \varepsilon$

2. (3) Τύπου Μεταβολής Παραμέτρων $\Rightarrow$

(7) $\varphi(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} g(x(s))\, ds$

(διότι $x'(t) = Ax(t) + g(x(t)) =: Ax(t) + B(t)$)

$\Rightarrow$

$$\|\varphi(t,x_0)\| \leq \|e^{At}x_0\| + \left\|\int_0^t e^{A(t-s)} g(x(s))\,ds\right\|$$

$$\overset{(6)}{\leq} Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \left\|\int_0^t e^{A(t-s)} g(x(s))\,ds\right\|$$

$$\leq Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)} g(x(s))\|\,ds$$

$$\overset{(6)}{\leq} Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)} \|g(x(s))\|\,ds$$

$$\overset{(4)'}{\leq} Ke^{-\alpha t}\|x_0\| + \int_0^t K\underbrace{e^{-\alpha(t-s)}}_{e^{-\alpha t}e^{\alpha s}} m\,\|\varphi(s,x_0)\|\,ds$$

$\Rightarrow$

$$(8)\quad e^{\alpha t}\|\varphi(t,x_0)\| \leq K\|x_0\| + \int_0^t Km\,e^{\alpha s}\|\varphi(s,x_0)\|\,ds$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Gronwall:
(σ 61 σημειώσεις μαθήματος)

$\Rightarrow$

$$(9)\quad e^{\alpha t}\|\varphi(t,x_0)\| \leq K\|x_0\|e^{Kmt} \Leftrightarrow$$

$$(10)\quad \|\varphi(t,x_0)\| \leq K\|x_0\|e^{-(\alpha-Km)t}$$

Η (10) θα δώσει το αποτέλεσμα:

- Πρώτον: επιλέγοντας το $m>0$ αρκετά μικρό στην (4)' κατοχυρώνουμε ότι $\alpha - Km > 0$.

- Δεύτερον: στον ορισμό ευστάθειας, δοθέντος $\varepsilon>0$ επιλέγουμε $\delta = \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{K}\right\} \Leftrightarrow \delta<\varepsilon,\ K\delta<\varepsilon$

$$\|\bar{x}-x_0\| = \|x_0\| < \delta$$

Έχουμε λοιπόν από την (10)

$$(11)\quad \|\varphi(t,x_0)\| \le K\delta\, e^{-(\alpha-Km)t}$$

$$< \varepsilon\, e^{-(\alpha-Km)t}$$

$$< \varepsilon\ ,\quad t\geq 0.$$

Κατά συνέπεια έχουμε ευστάθεια.

Επίσης (11) $\Longrightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t,x_0)\| = 0\ ,\ (\text{εκθετικά})$$

$\square$

Ασκήσεις Τύπου Μεταβολής Παραμέτρων:

1.5, 1.7 από [AK]

1c, 1d, 2 σ. 102 of [HS]