Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα

A. ω και α οριακά σύνολα

Θεωρούμε ένα Δ.Σ. $\{\varphi(t,x)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$
$\varphi(t,\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Ορισμοί

(1) Θετική ημιτροχιά $\gamma^+(x_0) := \{ y = \varphi(t,x_0) \mid t \geq 0 \}$
Αρνητική ημιτροχιά $\gamma^-(x_0) := \{ \quad '' \quad \mid t \leq 0 \}$

(2) $\omega(x_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0)$, για κάποια ακολουθία $\{t_n\} \to +\infty \}$

$\alpha(x_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n, x_0)$, για κάποια ακολουθία $\{t_n\} \to -\infty \}$ □

Θεώρημα 1
Έστω $\gamma^+(x_0)$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
Τότε έχουμε
(i) $\omega(x_0) \neq \emptyset$
(ii) $\omega(x_0)$ συμπαγές (= κλειστό + φραγμένο)
(iii) $\omega(x_0)$ συνεκτικό
(iv) $\omega(x_0)$ είναι αναλλοίωτο, δηλαδή
$\varphi(t, \omega(x_0)) \subset \omega(x_0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

Απόδειξη
(i),(ii). Ισχύει ο εξής χαρακτηρισμός του $\omega(x_0)$:

(3) $\omega(x_0) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\{ \varphi(t;x) \mid t \geq \tau \}} = \overline{\gamma^+_\tau}(x_0)$

(Άσκηση 1, μέτριας δυσκολίας).

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{\gamma_\tau^+(x_0)\}$ είναι φθίνουσα, $\gamma_{\tau_1}^+(x_0) \subset \gamma_{\tau_2}^+(x_0)$ αν $\tau_1 > \tau_2$, και βεβαίως το $\gamma_\tau^+(x_0)$ είναι συμπαγές διότι περιέχεται στο $\overline{\gamma^+(x_0)}$, άρα φραγμένο, και κλειστό (δική), ως τομή κλειστών.

Από κλασικό θεώρημα της Ανάλυσης η τομή φθίνουσας οικογένειας συμπαγών συνόλων είναι $\neq \phi$. και συμπαγής (Άσκηση 2, βλ. Carothers, Real Analysis Θεώρημα 7.11, και Άσκηση 26, σ 96)

(iii) Για την συνεκτικότητα θα προχωρήσουμε με άτοπο.
Έστω ότι το $\omega(x_0)$ δεν είναι συνεκτικό.
Αυτό σημαίνει ότι

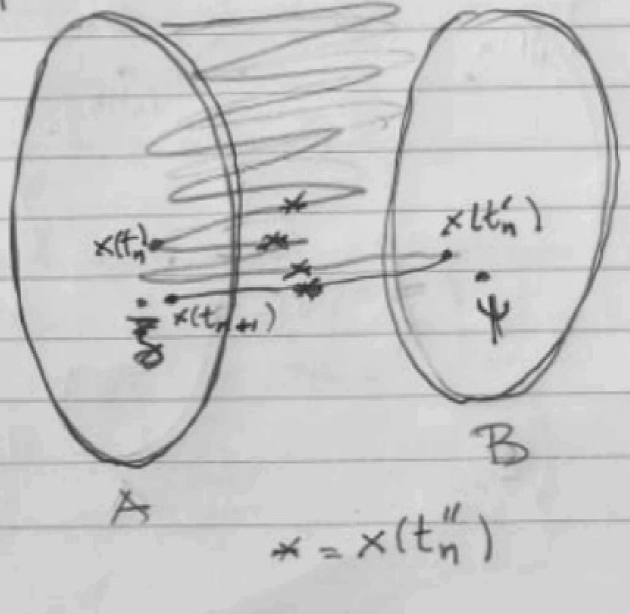
$$\omega(x_0) = A \cup B \quad , A \neq \phi, B \neq \phi$$

όπου A, B κλειστά, $A \cap B = \phi$

Εφόσον το $\omega(x_0)$ είναι συμπαγές έπεται ότι τα A, B είναι συμπαγή. Θεωρούμε την απόσταση

$$d(A,B) = \inf\{|x-y|,\ x\in A, y \in B\}$$

Λόγω συμπάγειας $d(A,B) > 0$ (Άσκηση 3)
Θέτουμε $3\delta = d(A,B)$



$x(t) = \varphi(t, x_0)$

Επιλέγουμε $\xi \in A$, $\psi \in B$. Έπεται ότι $\exists$ ακολουθίες $\{t_n\}$, $\{t_n'\}$ τ.ω.

$$(4) \quad \varphi(t_n, x_0) \longrightarrow \xi, \quad \varphi(t_n', x_0) \longrightarrow \psi$$

Επιλέγοντας κατάλληλα υπακολουθίες μπορούμε να κατοχυρώσουμε ότι $t_n < t_n' < t_{n+1}$ (γιατί;)
Επίσης δοθέντος $\delta > 0$ $\exists$ N τ.ω. για $n > N$

$$(5) \quad d(\varphi(t_n, x_0), A) < \delta, \quad d(\varphi(t_n', x_0), B) < \delta$$

$$\Rightarrow d(\varphi(t_n', x_0), A) > 2\delta \quad \text{(από τριγωνική ανισότητα)}$$

Κατά συνέπεια από συνέχεια της $g(t) = d(\varphi(t), A)$ $\exists$ $t_n'' \in (t_n, t_n')$ τ.ω. $d(\varphi(t_n'', x_0), A) = \frac{3\delta}{2}$.
Επίσης $d(\varphi(t_n'', x_0), B) \geq \frac{\delta}{2}$

(ειδάλλως $d(\varphi(t_n'', x_0), B) < \delta/2$, $d(\varphi(t_n'', x_0), A) = \frac{3\delta}{2}$

$\Rightarrow \exists$ $a \in A$, $b \in B$ τ.ω.

$$|\varphi(t_n'', x_0) - b| < \delta/2, \quad |\varphi(t_n'', x_0) - a| = \frac{3\delta}{2}$$

$$\overset{\text{Τριγωνική}}{\Longrightarrow} |a - b| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{3\delta}{2} = 2\delta \Rightarrow d(A, B) \leq 2\delta,$$

άτοπο!).

Εφόσον η $\gamma^+(x_0)$ είναι φραγμένη, έπεται ότι $\exists$ υπακολουθία της $\{t_n''\}$, $\{t_n'''\}$, τ.ω. $\varphi(t_n''', x_0) \to \xi$.
Προκύπτουν όμως τα εξής:

$$d(\varphi(t_n''', x_0), A) = \frac{3\delta}{2} \Longrightarrow d(\xi, A) = \frac{3\delta}{2}$$

$$d(\varphi(t_n'''), x_0, B) \geq \frac{\delta}{2} \Longrightarrow d(\xi, B) \geq \frac{\delta}{2}$$

Όμως $\xi \in \omega(x_0) = A \cup B$, άτοπο!

<u>(iv)</u>

Έστω $\xi \in \omega(x_0)$. Θα δείξουμε ότι $\varphi(t,\xi) \in \omega(x_0)$ $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

Πράγματι εφόσον $\xi \in \omega(x_0) \Rightarrow \exists \{t_n\} \to +\infty$ τ.ω.

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(t,\xi) = \varphi\left(t, \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \varphi(t, \varphi(t_n, x_0))$$

(λόγω συνέχειας $x \to \varphi(t,x)$)

$$= \lim_{n\to\infty} \varphi(t+t_n, x_0)$$

(λόγω ιδιότητας ομάδος του Δ.Σ.).

$\therefore\ \varphi(t,\xi) \in \omega(x_0)$. □

B. Αρχή LaSalle

Το επόμενο Θεώρημα συμπληρώνει τα Θεωρήματα των Lyapunov, και σε συνδυασμό με το Θεώρημα 1 επιτρέπει την απόδειξη ασυμπτωτικής ευστάθειας σε ορισμένες περιπτώσεις που η $\dot{V}$ δεν είναι αρνητικά ορισμένη.

Θεώρημα 2

Έστω $V(x)$, $V: U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$), C^1 συνάρτηση, όχι αναγκαστικά μη αρνητική που ικανοποιεί

$$\text{(6)} \qquad \dot{V}(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in U$$

Ορίζουμε το

$$\text{(7)} \qquad E = \{x \in G \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

όπου G συμπαγές σύνολο. Έστω επίσης ότι $\gamma^+(x_0) \subset G$. Θεωρούμε το Μέγιστο Αναλλοίωτο (θετικά και αρνητικά) υποσύνολο του E, που καλούμε M.

Τότε

$$\varphi(t, x_0) \longrightarrow M \quad \text{όπως } t \to \infty$$

$\left(\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t, x_0), M) = 0 \right)$, και

V είναι σταθερά στο M.

Σημείωση

Η $\dot{V}$ μπορεί να οριστεί για αφηρημένα Δ.Σ. ως εξής:

$$\dot{V}(x_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\varphi(t, x_0)) \tag{8}$$

Στην περίπτωση που το Δ.Σ. προέρχεται από διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

δηλαδή $\varphi(t, x_0) = x(t)$, τότε ο ορισμός (8) συμπίπτει με τον προηγούμενο ορισμό:

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, x_0)) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$= \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)).$$

$$\therefore \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\varphi(t, x_0)) = \nabla V(x_0) \cdot f(x_0).$$

$\blacksquare$

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, x)) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} V(\varphi(t+\tau, x))$$

(προφανές ορισμός παραγώγου)

$$= \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} V(\varphi(\tau, \varphi(t,x))) \quad \text{(ιδιοτητα ομαδας)}$$

$$= \dot{V}(\varphi(t,x)) \leq 0 \quad \text{(απο (6))}$$

Κατα συνεπεια η $t \longrightarrow V(\varphi(t,x_0))$ ειναι φθινουσα, και συνεχης.

$$\gamma^+(x_0) = \{\varphi(t,x_0) \mid t \geq 0\} \subset G$$

Επομενως $\overline{\gamma^+(x_0)}$ συμπαγες. Επεται οτι

(9) $\lim_{t \to +\infty} V(\varphi(t,x_0)) = L \,, \quad L \in (-\infty, \infty)$

Εστω τωρα $y \in \omega(x_0) \Rightarrow y = \lim_{t_n \to +\infty} \varphi(t_n, x_0)$

$$\overset{(9)}{\Longrightarrow} V(y) = L.$$

Το y ηταν αυθαιρετο στοιχειο του $\omega(x_0)$. Εφοσον το $\omega(x_0)$ ειναι αναλλοιωτο (Θ 1 (iv)) εχουμε οτι

(10) $V(\varphi(t,y)) = L \,, \quad t \in \mathbb{R}$

Ειδικα $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(\varphi(t,y)) = 0 \Leftrightarrow \dot{V}(y) = 0.$

Προφανως $\omega(x_0) \subset M$ και επισης
$\varphi(t,x_0) \longrightarrow \omega(x_0) \subset M$

$\square$

Σημειωση

Το M, Μεγιστο Αναλλοιωτο Συνολο, περιεχει ολα τα ω-οριακα συνολα, και $\dot{V}(x) = \perp$ για $x \in M$, $M \subset \{x \mid \dot{V}(x) = 0\}$

10.15(β)

Να δειχθει οτι η αρχη των αξονων ειναι ασυμπτωτικα ευσταθης για την εξισωση

$$x'' + (x')^3 + g(x) = 0$$

οπου $g(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}$

Λυση

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -g(x_1) - x_2^3 \end{cases}$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + U(x_1), \qquad U(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi$$

$$U(x) = 2\left(\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - 1 \right)$$

Σημεια Ισορροπιας

$x_2 = 0$, $g(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow (0,0)$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \nabla V \cdot (x_2, -g(x_1) + x_2^3) = (g(x_1), x_2) \cdot (x_2, -g(x_1) + x_2^3)$$

$$= -x_2^4 \leq 0.$$

$x g(x) > 0$ για $x \neq 0 \Rightarrow U(x) > 0$ για $x \neq 0$

$\therefore \quad V(x_1,x_2) > 0 \quad$ για $(x_1,x_2) \neq (0,0)$

$V(0,0) = 0$

$\Rightarrow (0,0)$ ειναι ευσταθες (Θεωρημα Ευσταθειας Lyap.)

Στη συνεχεια θα δειξουμε οτι το $(0,0)$ ειναι ολικα ασυμπτωτικα ευσταθες. Παρατηρουμε οτι η $\dot{V}$ δεν ειναι αρνητικα ορισμενη ($\dot{V} = 0$ στο $\{x_2 = 0\}$) και κατα συνεπεια τα Θεωρηματα του Lyapunov δεν μπορουν να εφαρμοσταν.

Θεωρουμε μια λυση $(x_1(t), x_2(t))$

① $V(x_1(t), x_2(t)) \leq V(x_1(0), x_2(0))$,

Επισης

② $$\lim_{|x_1| \to \infty} V(x_1) = \lim_{|x_1| \to \infty} 2\left(\ln|x_1+1| + \frac{1}{x_1+1} - 1\right) = \infty.$$

Επεται οτι

③ $$\lim_{(|x_1|^2+|x_2|^2)^{1/2} \to \infty} V(x_1,x_2) = +\infty$$

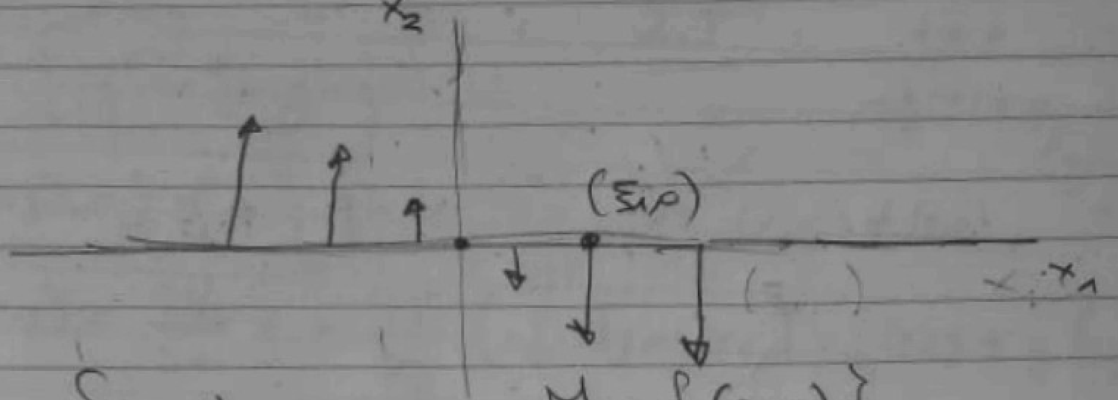
Δισκος ακτινας K

Απο τα ①, ③ $\Rightarrow |x(t)| < K$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$

Συνεπως $\gamma^+((x_1(0), x_2(0))) \subset G = B(0;K)$

Θεωρουμε το Μεγιστο Αναλλοιωτο Συνολο $M \subset B(0;K)$

$$E = \{(x_1,x_2)\in B(0;K) \mid \dot V(x_1,x_2)=0\} \subset \{x_2=0\}$$



Θα δείξουμε ότι $M=\{(0,0)\}$.

Πράγματι έστω $(\xi_1,\xi_2)\in M$, $(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0)$.
Αναγκαστικά $\xi_2=0$. Στο Σχήμα έχουμε το διανυσματικό πεδίο στον x_1-άξονα που περιέχει το M.
Παρατηρούμε ότι η $\varphi(t,(\xi_1,0))$ εξέρχεται από τον x_1-άξονα $\forall\, \xi_1=0$. Έπεται ότι το $(\xi_1,0)\notin M\subset\{x_2=0\}$ (διότι $\varphi(t,M)\subset M\subset\{x_2=0\}$).

$\Longrightarrow$ $M=\{(0,0)\}$

$\Longrightarrow$ $\omega(x_1(0),x_2(0))=\{(0,0)\}$

$\Longrightarrow$ $\lim_{t\to+\infty}(x_1(t),x_2(t))=(0,0)$.

$\therefore$ Το $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

$\square$

10.12

$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ $\quad \begin{cases} f, g \in C^1, \; xg(x) > 0 \; x \neq 0, \; f(x) > 0 \\ \int_0^x g(u)du \to +\infty \end{cases}$

$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x)y - g(x) \end{cases}$ $\quad$ **Σ.Ι.** $\left.\begin{matrix} y = 0 \\ -g(x) = 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow (0,0)$ $\quad (g(x)x > 0,\; x \neq 0)$

$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)ds \overset{(*)}{>} 0$ για $(x,y) \neq (0,0)$.

$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y}\left(-f(x)y - g(x)\right) = g(x)y + y\left(-f(x)y - g(x)\right)$

$= -f(x)y^2 \leq 0$ (V Lyapunov, όχι αυστηρή).

(*) $\int_0^x g(s)ds = \begin{cases} > 0 & \text{για } x > 0 \text{ διότι } g(s) > 0 \text{ για } s > 0 \\ -\int_x^0 g(s)ds & \text{για } x < 0, \; g(s) < 0 \text{ για } s < 0 \Rightarrow \int_x^0 g(s)ds < 0. \end{cases}$

∴ $(0,0)$ είναι ευσταθές

Θεωρούμε μια λύση $(x(t), y(t))$

① $V(x(t), y(t)) \leq V(x(0), y(0))$

Επίσης

② $\lim\limits_{|x| \to \infty} \int_0^x g(s)ds \to +\infty$

Έπεται ότι

③ $\lim\limits_{(|x|^2 + |y|^2)^{1/2} \to \infty} V(x,y) = +\infty$

(1), (3) $\Rightarrow$ $$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} < K$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^+(x(0),y(0)) \subset G = B(0;K)$$

Η υπόλοιπη απόδειξη όπως στην 10.15 (β).

$\square$