

Κεφάλαιο 10

Το Επίπεδο Φάσης

10.1 Αυτόνομα Γραμμικά Συστήματα

10.1.1 Το επίπεδο φάσης. Ταξινόμηση σημείων ισορροπίας

Ως εφαρμογή της θεωρίας του κεφαλαίου 6 ταξινομούμε γεωμετρικά τις διάφορες συμπεριφορές των λύσεων της

$$x' = Ax \quad (10.1)$$

όπου

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

με τα a_{ij} , $i, j = 1, 2$, πραγματικές σταθερές.

Ορισμός 10.1 Καλούμε επίπεδο φάσης το x_1, x_2 -επίπεδο. Η κάθε λύση $x(t)$ της (10.1) μπορεί να θεωρηθεί σαν καμπύλη στο επίπεδο φάσης. Καλούμε διάγραμμα φάσης το σύνολο όλων των τροχιών της (10.1).

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση

$$\det A \neq 0. \quad (10.2)$$

Τα σημεία ισορροπίας της (10.1) δίνονται από την

$$Ax = 0.$$

Από την (10.2) προκύπτει ότι το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $[0, 0]^t$, δηλαδή η αρχή των αξόνων.

Έστω λ_1 και λ_2 οι ιδιοτιμές του A . Γνωρίζουμε ότι οι λ_1 και λ_2 επιλύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση που στην περίπτωση των 2×2 πινάκων παίρνει τη μορφή (βλ. Παράδειγμα 6.11)

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + |A| = 0.$$

Διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις.

10.1.2 Περίπτωση 1. Πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που ο πίνακας A έχει δύο πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 , με $\lambda_2 < \lambda_1$. Έστω u_1 και u_2 τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις λ_1 και λ_2 . Η γενική λύση της (10.1) δίνεται από την

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2, \quad (10.3)$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Θεωρούμε πρώτα τις ευθείες ε_1 και ε_2 που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα u_1 και u_2 . Παρατηρούμε ότι αν $x(0) = c_i u_i$ για $i = 1$ ή 2 τότε $x(t) = c_i e^{\lambda_i t} u_i$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Η ιδιότητα αυτή μεταφράζεται γεωμετρικά στο ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι *αναλλοιώτες*, δηλαδή αν η αρχική συνθήκη είναι επί της ευθείας, τότε η λύση παραμένει επί της ευθείας για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε ακόμη το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $x(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{x'(t)}{|x'(t)|} &= \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} u_2}{|c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} u_2|} \\ &= \frac{e^{\lambda_1 t} (c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2)}{e^{\lambda_1 t} |c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2|} \\ &= \frac{c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2}{|c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2|}, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'(t)}{|x'(t)|} = \frac{c_1 \lambda_1}{|c_1 \lambda_1|} u_1. \quad (c_1 \neq 0) \quad (10.4)$$

Παρόμοια, βγάζοντας κοινό παράγοντα το $e^{\lambda_2 t}$ υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x'(t)}{|x'(t)|} = \frac{c_2 \lambda_2}{|c_2 \lambda_2|} u_2. \quad (10.5)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία των (10.4) και (10.5) είναι ότι η τροχιά της λύσης προσεγγίζει ένα διάνυσμα παράλληλο στο u_1 καθώς το $t \rightarrow +\infty$ ενώ προσεγγίζει ένα διάνυσμα παράλληλο στο u_2 καθώς το $t \rightarrow -\infty$. Θα γίνουμε πιο συγκεκριμένοι παίρνοντας τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις.

Περίπτωση 1α. Ευσταθής κόμβος (Αρνητικές ιδιοτιμές, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$)

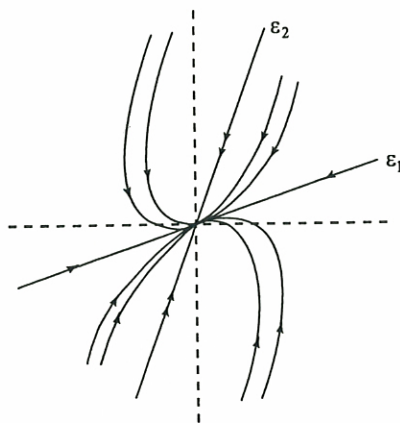
Από την (10.3) προκύπτει ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο $[0, 0]^t$, καθώς το t τείνει στο $+\infty$, και η παραπάνω πληροφορία για τις ασυμπτωτικές κατευθύνσεις επιτρέπει το σχεδιασμό των τροχιών όπως στο Σχήμα 10.1.

Στην περίπτωση αυτή η αρχή των αξόνων λέγεται **ευσταθής κόμβος**.

Παρατηρήστε ότι όλες οι τροχιές εκτός απ' αυτές που βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε_2 προσεγγίζουν την αρχή των αξόνων εφαπτομενικά στην ευθεία ε_1 .

Το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές¹.

¹Η έννοια της ευστάθειας έχει οριστεί για μία διάσταση στην ενότητα 3.2. Για την περίπτωση συστημάτων θα οριστεί στην ενότητα 10.5. Επί του παρόντος κάνουμε έκκληση στη διαίσθηση του αναγνώστη.



Σχήμα 10.1: Ευσταθής κόμβος.

Μία πιο λεπτομερής εξήγηση του διαγράμματος φάσης είναι εφικτή μέσω της κανονικής μορφής. Γνωρίζουμε ότι για διακεκριμένες ιδιοτιμές ο πίνακας A διαγωνοποιείται:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} =: J.$$

Εάν τώρα θέσουμε

$$x = Py, \quad (10.6)$$

τότε το σύστημα (10.1) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$Py' = x' = Ax = APy \Rightarrow y' = P^{-1}APy = Jy,$$

δηλαδή

$$y' = P^{-1}APy = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} y. \quad (10.7)$$

Είναι πολύ απλό να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσης για το σύστημα (10.7). Η (10.7) γράφεται

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

απ' όπου απαλείφοντας το χρόνο προκύπτει ότι

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\frac{dy_2}{dt}}{\frac{dy_1}{dt}} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1}. \quad (10.8)$$

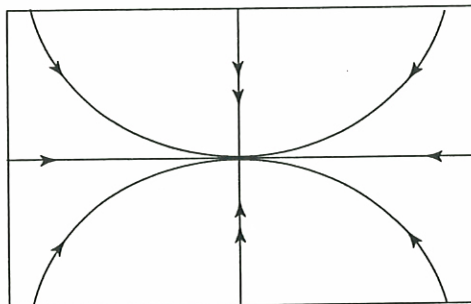
Η (10.8) είναι εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\frac{dy_2}{y_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{dy_1}{y_1} \Rightarrow \ln |y_2| = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln |y_1| + \ln C \Rightarrow \ln |y_2| = \ln \left(|y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} C \right),$$

ή ισοδύναμα

$$|y_2| = C|y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1, \quad (10.9)$$

όπου C σταθερά. Το διάγραμμα φάσης στο y_1, y_2 -επίπεδο συνίσταται από «παραβολοειδείς» καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές σταθερές C , όπως στο Σχήμα 10.2.



Σχήμα 10.2: Κανονική μορφή ευσταθούς κόμβου.

Μέσω του μετασχηματισμού (10.6) παίρνουμε το διάγραμμα στο x -επίπεδο από το διάγραμμα στο y -επίπεδο. Οι καμπύλες στο x_1, x_2 -επίπεδο φάσης είναι παραμορφώσεις των γραφημάτων που αντιστοιχούν στην (10.9). Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός (10.6) διαστέλλει/συστέλλει και στρέφει. Παρατηρούμε ότι στο y -επίπεδο οι άξονες είναι αναλλοίωτοι και ότι η ροή είναι ισχυρότερη στον y_2 -άξονα, ενώ οι τροχιές εισέρχονται εφαπτομενικά στον y_1 -άξονα.

Περίπτωση 1β. Ασταθής κόμβος (Θετικές ιδιοτιμές, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$)

Αυτή η περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη, αλλάζοντας την φορά του χρόνου. Πράγματι, αν $t = -\tau$ τότε η λύση x ικανοποιεί την

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{dx}{dt} = -Ax. \quad (10.10)$$

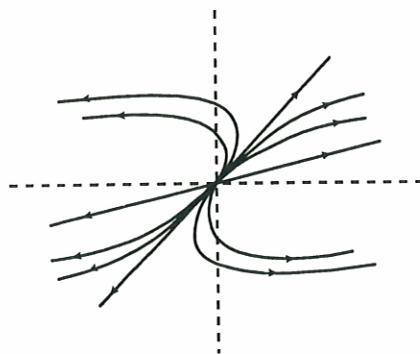
Οι ιδιοτιμές του $-A$ είναι οι $-\lambda_1 < -\lambda_2 < 0$. Το διάγραμμα φάσης του (10.10) δίνεται από το Σχήμα 10.3. Παρατηρήστε την επαφή των τροχιών με τον x_1 -άξονα.

Η αρχή των αξόνων εδώ λέγεται **ασταθής κόμβος**.

Παράδειγμα 10.1 Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης του συστήματος

$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Ο τύπος του σημείου ισοροπίας μπορεί να καθοριστεί και χωρίς λεπτομερή υπολογισμό των ιδιοτιμών ως εξής: παρατηρούμε ότι $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A = -5 < 0$ και $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = 4$. Συνεπώς και οι δύο ιδιοτιμές είναι αρνητικές, δηλαδή έχουμε



Σχήμα 10.3: Ασταθής κόμβος.

ευσταθή κόμβο. Για να σχεδιάσουμε το επίπεδο φάσης χρειαζόμαστε τα ιδιοδιανύσματα, κατά συνέπεια πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,$$

από όπου προκύπτει ότι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -4$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ομοίως λύνοντας το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

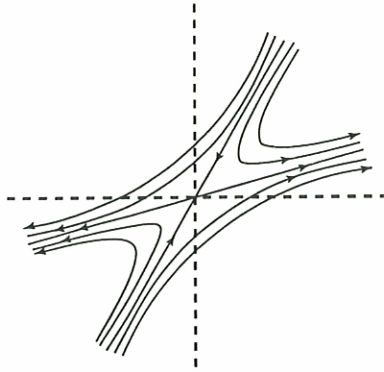
παίρνουμε ότι

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Περίπτωση 1γ. Σαγματικό σημείο (Ετερόσημες ιδιοτιμές, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)

Από την (10.3), οι τροχιές που βρίσκονται πάνω στην ευθεία e_2 τείνουν στο $[0, 0]^t$ καθώς το $t \rightarrow +\infty$, ενώ εκείνες που βρίσκονται πάνω στην ευθεία e_1 τείνουν στο $[0, 0]^t$ καθώς το $t \rightarrow -\infty$. Όλες οι άλλες τροχιές έχουν $c_1 \neq 0$ και $c_2 \neq 0$ συνεπώς δεν είναι φραγμένες ούτε όταν το $t \rightarrow +\infty$, ούτε καθώς το $t \rightarrow -\infty$. Το διάγραμμα φάσης είναι όπως στο Σχήμα 10.4.

Η ευθεία e_1 λέγεται **ασταθής πολλαπλότητα** ενώ η ευθεία e_2 λέγεται **ευσταθής πολλαπλότητα**. Το σημείο ισορροπίας $[0, 0]^t$ είναι ασταθές.



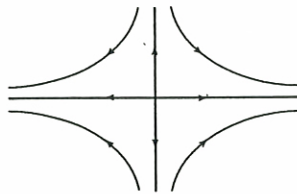
Σχήμα 10.4: Σαγματικό σημείο.

Παρατήρηση 10.1 Στην περίπτωση σαγματικού σημείου βλέπουμε ότι η ασταθής πολλαπλότητα σαν σύνολο είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, διότι $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ καθώς το $t \rightarrow +\infty$.

Κάνοντας χρήση της κανονικής μορφής όπως στην περίπτωση 1α, μπορούμε να δώσουμε πιο λεπτομερή εξήγηση του διαγράμματος φάσης. Ακολουθώντας τις (10.6), (10.7), (10.8) και (10.9) παίρνουμε ότι στο y_1, y_2 -επίπεδο οι τροχιές δίνονται από την

$$|y_2| = C|y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0,$$

όπου C σταθερά. Στην περίπτωση αυτή έχουμε «υπερβολοειδείς» καμπύλες όπως στο Σχήμα 10.5.



Σχήμα 10.5: Κανονική μορφή σάγματος.

Το διάγραμμα φάσης για το αρχικό σύστημα $x' = Ax$ δίνεται μέσω του μετασχηματισμού P στην (10.6).

Παράδειγμα 10.2 Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης του συστήματος

$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Υπολογίζουμε την $\det A = -9 < 0$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες και έχουμε περίπτωση σαγματικού σημείου. Συγκεκριμένα η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 9 = 0,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -3$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα δίνονται από τα ακόλουθα συστήματα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ενώ το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

δίνει το ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

10.1.3 Περίπτωση 2. Μιγαδικές ιδιοτιμές

Γνωρίζουμε από την ενότητα 6.6 ότι η γενική λύση δίνεται από την

$$\mathbf{x}(t) = 2ae^{\alpha t} [\mathbf{u} \cos(\beta t + \delta) - \mathbf{v} \sin(\beta t + \delta)], \quad (10.11)$$

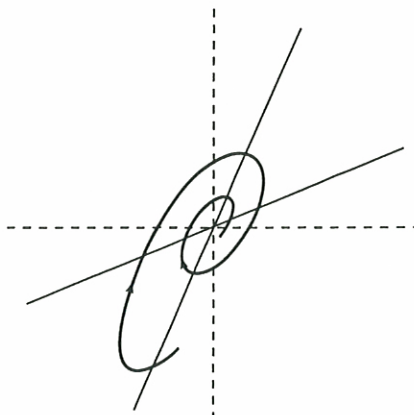
όπου $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ και $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Η έκφραση (10.11) δίνει όλα τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά των λύσεων. Εάν $\beta t + \delta = k\pi$, όπου k ακέραιος, τότε το ημίτονο είναι μηδέν και η τροχιά τέμνει την ευθεία ε_1 που ορίζεται από το διάνυσμα \mathbf{u} . Ομοίως αν $\beta t + \delta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, όπου k ακέραιος, τότε η τροχιά τέμνει την ευθεία ε_2 που ορίζεται από το \mathbf{v} . Οι συνιστώσες \mathbf{u} και \mathbf{v} ταλαντώνονται και έχουν διαφορά φάσης κατά $\frac{\pi}{2}$. Συμπεραίνουμε ότι η τροχιά θα έχει ελικοειδή μορφή όπως στα Σχήματα 10.6 και 10.7. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η φορά της τροχιάς (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) καθορίζεται από το πρόσημο του β , ενώ το κατά πόσον η τροχιά έλκεται ή απωθείται από την αρχή των αξόνων καθορίζεται από το πρόσημο του α .

Περίπτωση 2α. Κέντρο (Φανταστικές ιδιοτιμές)

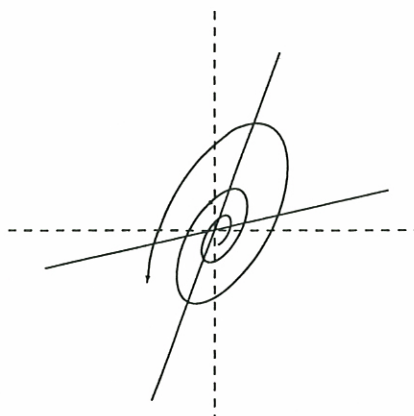
Εάν οι ιδιοτιμές του A είναι $\pm i\beta$, τότε η γενική λύση του (10.1) δίνεται από τον τύπο (10.11):

$$\mathbf{x}(t) = C [\mathbf{u} \cos(\beta t + \delta) - \mathbf{v} \sin(\beta t + \delta)],$$

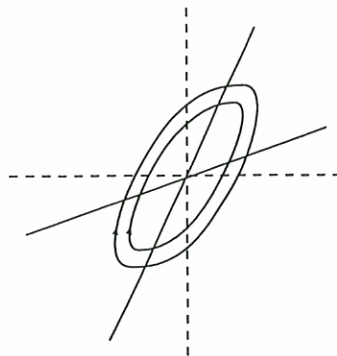
όπου C και δ αυθαίρετες σταθερές. Οι τροχιές είναι κλειστές καμπύλες και όλες οι λύσεις είναι περιοδικές με περίοδο $\frac{2\pi}{\beta}$. Το $[0, 0]^t$ στην περίπτωση αυτή λέγεται κέντρο και το επίπεδο φάσης είναι όπως στο Σχήμα 10.8.



Σχήμα 10.6: Ευσταθής εστία.



Σχήμα 10.7: Ασταθής εστία.



Σχήμα 10.8: Κέντρο.

Περίπτωση 2β. Ευσταθής εστία (Μιγαδικές ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος)

Εάν $\alpha < 0$ τότε από την (10.11) προκύπτει ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν καθώς το $t \rightarrow +\infty$ και οι τροχιές είναι ελικοειδείς. Το σημείο ισορροπίας λέγεται ευσταθής εστία (βλ. Σχήμα 10.6) και έχουμε διάγραμμα φάσης με ελκυστική έλικα.

Περίπτωση 2γ. Ασταθής εστία (Μιγαδικές ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος)

Εάν $\alpha > 0$, τότε οι λύσεις τείνουν στο μηδέν καθώς το $t \rightarrow -\infty$ και το σημείο ισορροπίας λέγεται ασταθής εστία (βλ. Σχήμα 10.7) και έχουμε διάγραμμα φάσης με απωθητική έλικα.

Τα διαγράμματα φάσης και στην περίπτωση 2 μπορεί να τα εξηγήσει κανείς κάνοντας χρήση της αντίστοιχης κανονικής μορφής. Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 6 (βλ. Παρατήρηση 6.5) ότι το σύστημα

$$x' = Ax,$$

κάτω από το μετασχηματισμό $x = Py$ μετασχηματίζεται στο

$$y' = P^{-1}APy. \quad (10.12)$$

Στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές γνωρίζουμε ότι υπάρχει πίνακας P τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

όπου $\alpha \pm \beta i$ οι ιδιοτιμές του A . Η (10.12) παίρνει τη μορφή

$$y' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} y,$$

ισοδύναμα

$$\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2' = -\beta y_1 + \alpha y_2 \end{cases} \quad (10.13)$$

Εισάγουμε τώρα πολικές συντεταγμένες:

$$y_1 = r \cos \theta, \quad y_2 = r \sin \theta,$$

με $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, οπότε το σύστημα (10.13) παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = \alpha r \cos \theta + \beta r \sin \theta \\ r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = -\beta r \cos \theta + \alpha r \sin \theta \end{cases} \quad (10.14)$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση από τις (10.14) με $\cos \theta$, τη δεύτερη με $\sin \theta$ και προσθέτοντας παίρνουμε

$$r' = \alpha r. \quad (10.15)$$

Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με $\sin \theta$, την δεύτερη με $\cos \theta$ και αφαιρέσουμε, παίρνουμε

$$\theta' = -\beta. \quad (10.16)$$

Η επίλυση των απλών διαφορικών εξισώσεων (10.15) και (10.16) δίνει τις

$$r(t) = r(0)e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = -\beta t + \theta(0). \quad (10.17)$$

Από την (10.17) προκύπτει ότι το πρόσημο του α καθορίζει αν η $r(t)$ φθίνει (εκθετικά) στο μηδέν ή τείνει (εκθετικά) στο άπειρο. Επίσης από την (10.16) βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή στο χρόνο, δεξιόστροφη αν $\beta < 0$ και με αντίθετη φορά αν $\beta > 0$. Διαιρώντας τις εξισώσεις (10.16) και (10.17) παίρνουμε

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\alpha}{\beta} r. \quad (10.18)$$

Η (10.18) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και ολοκληρώνεται εύκολα:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\alpha}{\beta} d\theta,$$

δηλαδή

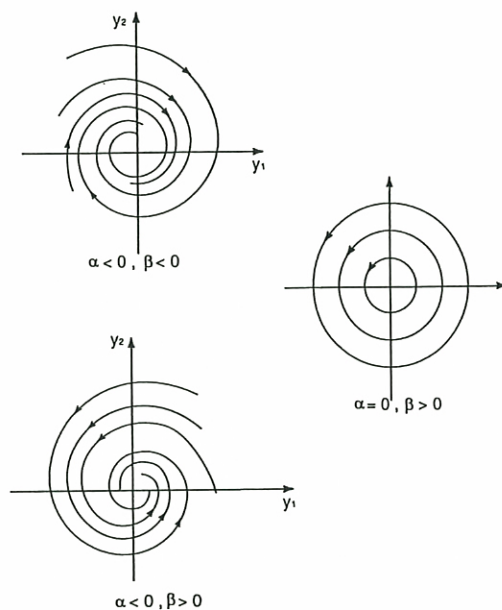
$$r = ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}. \quad (10.19)$$

Από την (10.19) είναι εμφανές στο y -επίπεδο ότι η τροχιά είναι ελικοειδής αν $\alpha \neq 0$ και κυκλική αν $\alpha = 0$ (βλ. Σχήμα 10.9).

Τα διαγράμματα στο x -επίπεδο δίνονται από τα αντίστοιχα διαγράμματα στο y -επίπεδο μέσω του μετασχηματισμού $x = Py$.

Παράδειγμα 10.3 Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης για το γραμμικό σύστημα

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} x$$

Σχήμα 10.9: Η μιγαδική περίπτωση, τα πρόσημα των α, β .

Λύση 1: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 16 = 0,$$

απ' όπου έχουμε

$$\lambda = \pm 4i.$$

Υπολογίζουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 4i \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$-2u_2 = 4iu_1, \quad 8u_1 = 4iu_2$$

και συνεπώς το $[1, -2i]^t$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $4i$. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι το $[1, 2i]^t$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-4i$. Η γενική λύση λοιπόν είναι

$$x(t) = c_1 e^{4it} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} + \bar{c}_1 e^{-4it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix},$$

όπου c_1 αυθαίρετη μιγαδική σταθερά, άρα

$$x(t) = 2\operatorname{Re} \{ c_1 e^{4it} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \} = 2(\operatorname{Re} c_1) \left[\cos 4t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin 4t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right],$$

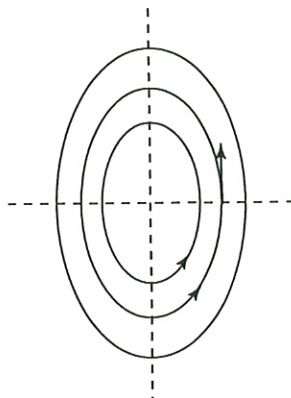
ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} x_1(t) = k \cos 4t \\ x_2(t) = -2k \sin 4t \end{cases},$$

όπου $k = 2\operatorname{Re} c_1$. Απαλείφοντας το t έχουμε

$$\frac{x_1^2}{k^2} + \frac{x_2^2}{(2k)^2} = 1, \quad (10.20)$$

όπου k σταθερά. Η (10.20) δίνει μία οικογένεια από ελλείψεις (βλ. Σχήμα 10.10) με άξονες που καθορίζονται από τα διανύσματα $u = [1, 0]^t$ και $v = [0, -2]^t$.



Σχήμα 10.10: Παράδειγμα 10.3.

Ένας απλός τρόπος για να αποφασίσουμε για την φορά της κίνησης των τροχιών είναι να βρούμε κάποιο εφαπτόμενο διάνυσμα (ταχύτητα). Επιλέγουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $(x_1, 0)$, $x_1 > 0$, το οποίο δίνεται από το

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8x_1 \end{bmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η κίνηση είναι αριστερόστροφη.

Λύση 2: Το αρχικό σύστημα γράφεται ως προς x_1 και x_2 ως εξής:

$$x_1' = -2x_2, \quad x_2' = 8x_1.$$

Διαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις απαλείφουμε το χρόνο και έχουμε

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{4x_1}{x_2} \Leftrightarrow x_2 dx_2 + 4x_1 dx_1 = 0,$$

απ' όπου ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\frac{x_2^2}{2} + 2x_1^2 = C^2,$$

όπου C σταθερά, ή ισοδύναμα

$$\frac{x_1^2}{k^2} + \frac{x_2^2}{(2k)^2} = 1,$$

όπου $k^2 = \frac{C^2}{2}$. Η φορά των τροχιών βρίσκεται όπως και στον πρώτο τρόπο λύσης.

Παράδειγμα 10.4 Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης για το γραμμικό σύστημα

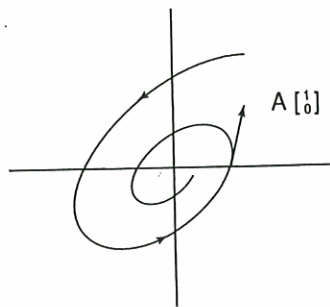
$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Έχουμε

$$\text{tr } A = -2, \quad \det A = 2,$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι οι $-1 \pm i$. Έπεται ότι έχουμε ευσταθή εστία (βλ. Σχήμα 10.11). Για να αποφασίσουμε για την φορά θεωρούμε το διάνυσμα της ταχύτητας στο $[1, 0]^t$:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 10.11: Παράδειγμα 10.4.

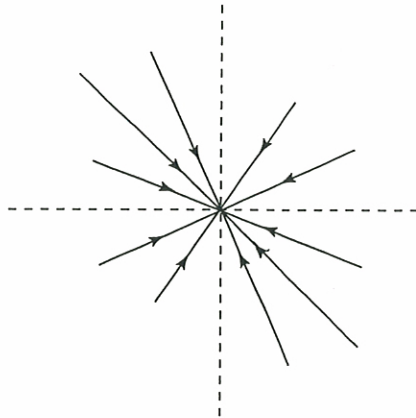
10.1.4 Περίπτωση 3. Ίσες ιδιοτιμές (Νόθος κόμβος)

Περίπτωση 3α.

Σε αυτή την περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι αναγκαστικά πραγματικές. Εάν υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $u = [u_1, u_2]^t$ και $v = [v_1, v_2]^t$ για την ιδιοτιμή λ τότε η λύση είναι

$$x(t) = \left(c_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) e^{\lambda t}$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες σταθερές. Οι τροχιές είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Εάν $\lambda < 0$ τότε έχουμε ευσταθή νόθο κόμβο (βλ. Σχήμα 10.12), ενώ αν $\lambda > 0$ τότε έχουμε ασταθή νόθο κόμβο.



Σχήμα 10.12: Νόθος κόμβος, η διαγωνοποιήσιμη περίπτωση.

Περίπτωση 3β.

Εάν υπάρχει μόνο ένα (γραμμικά ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^t$ για την λ τότε η γενική λύση είναι

$$\mathbf{x}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (10.21)$$

όπου $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^t$ ένα αυθαίρετο διάνυσμα που λαμβάνεται γραμμικά ανεξάρτητο από το \mathbf{u} . Η εφαπτομένη στην τροχιά καθορίζεται από το $\mathbf{x}'(t)$. Παραγωγίζοντας την (10.21) έχουμε

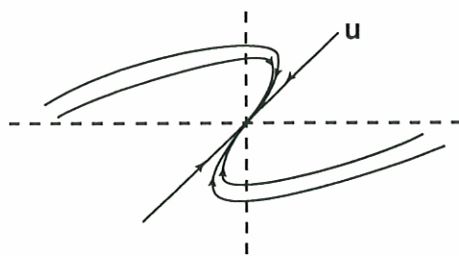
$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \frac{d}{dt} [(c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \mathbf{u} + c_2 e^{\lambda t} \mathbf{v}] \\ &= [(c_1 + c_2 t)\lambda e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}] \mathbf{u} + c_2 \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} \\ &= t e^{\lambda t} \left[\left(\frac{c_1 \lambda}{t} + \frac{c_2}{t} + c_2 \right) \mathbf{u} + \frac{c_2 \lambda}{t} \mathbf{v} \right], \end{aligned}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι καθώς το $|t| \rightarrow +\infty$, το $\mathbf{x}'(t)$ προσεγγίζεται από το $c_2 t e^{\lambda t} \mathbf{u}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τροχιά γίνεται παράλληλη στο \mathbf{u} καθώς το $|t| \rightarrow +\infty$ (βλ. Σχήμα 10.13). Και στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε νόθο κόμβο.

Παρατήρηση 10.2 Η ευθεία ε που ορίζεται από το διάνυσμα \mathbf{u} παραμένει αναλλοίωτη. Πράγματι από την (10.21) η $\mathbf{x}(0) \in \varepsilon$ ισοδυναμεί με την περίπτωση $c_2 = 0$ και τότε

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{u},$$

για $t \neq 0$.



Σχήμα 10.13: Νόθος κόμβος, η περίπτωση Jordan.

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις τα διαγράμματα φάσης γίνονται πιο καταληπτά μέσω της κανονικής μορφής. Θεωρούμε λοιπόν τις περιπτώσεις

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

και

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (10.23)$$

Στην περίπτωση της (10.22) το μετασχηματισμένο σύστημα είναι

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

ισοδύναμα

$$y_1' = \lambda y_1, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

Διαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_2}{y_1} &\Rightarrow \frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy_2}{y_2} \\ &\Rightarrow y_2 = c y_1. \end{aligned}$$

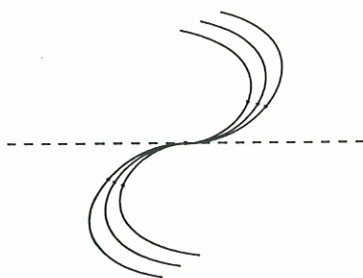
Συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα φάσης στο y -επίπεδο συνίσταται από ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Το διάγραμμα φάσης στο x -επίπεδο δίνεται μέσω του μετασχηματισμού $x = Py$. Είναι γνωστό ότι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί μετασχηματίζουν ευθείες σε ευθείες. Καταλήγουμε λοιπόν στην περίπτωση 3(α).

Στην περίπτωση της εξίσωσης (10.23) το μετασχηματισμένο σύστημα είναι

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

ισοδύναμα

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2, \quad y_2' = \lambda y_2. \quad (10.24)$$



Σχήμα 10.14: Κανονική μορφή Jordan.

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda t}.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2(0)e^{\lambda t}.$$

Αυτή είναι γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης που επιλύεται εύκολα:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda t} y_1(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} y_2(0) e^{\lambda \tau} d\tau \\ &= e^{\lambda t} y_1(0) + e^{\lambda t} y_2(0) t. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση

$$y_2(t) = \frac{1}{\frac{y_1(0)}{y_2(0)} + t} y_1(t),$$

από όπου έχουμε

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = 0. \quad (10.25)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις του συστήματος (10.24) έχουμε

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda y_2}{\lambda y_1 + y_2} = \frac{\lambda \frac{y_2}{y_1}}{\lambda + \frac{y_2}{y_1}},$$

που λόγω της (10.25) δίνει

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{dy_2}{dy_1} = 0.$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι οι τροχιές καθώς το $|t| \rightarrow +\infty$ τείνουν να γίνουν παράλληλες στον y_1 -άξονα.

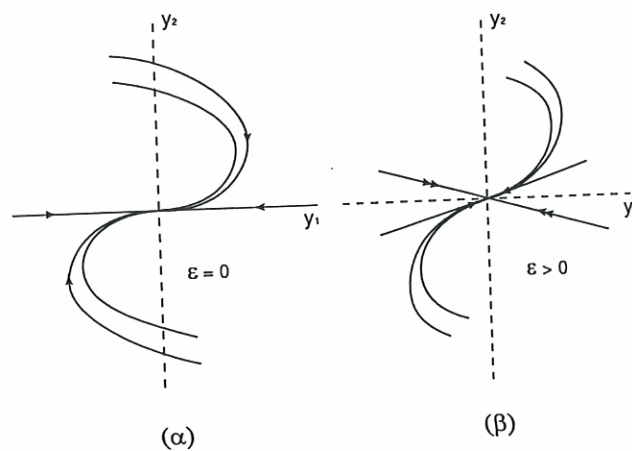
Εάν $\lambda < 0$ τότε $y_1(t) \rightarrow 0$ και $y_2(t) \rightarrow 0$, καθώς το $t \rightarrow +\infty$, ενώ αν $\lambda > 0$ τότε έχουμε ότι $y_1(t) \rightarrow 0$ και $y_2(t) \rightarrow 0$ καθώς το $t \rightarrow -\infty$.

Με τον τρόπο αυτόν εξηγείται πλήρως η περίπτωση 3(β) (βλ. Σχήμα 10.13), που είναι γραμμική παραμόρφωση του Σχήματος 10.14 όπου $\lambda < 0$. Τα βέλη αντιστρέφονται αν $\lambda > 0$, και ο κόμβος είναι ασταθής.

Παράδειγμα 10.5 Μελετήστε το επίπεδο φάσης του συστήματος

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \varepsilon & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (10.26)$$

για $0 \leq \varepsilon \ll 1$ (βλ. Σχήμα 10.15).



Σχήμα 10.15: Παράδειγμα 10.5.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0,$$

δηλαδή

$$\lambda^2 + \lambda + \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) = 0,$$

από όπου έπεται ότι

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\varepsilon}.$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα δίνονται από το σύστημα

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \varepsilon & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\varepsilon}\right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

απ' όπου εύκολα βρίσκουμε τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Τα διαγράμματα φάσης είναι όπως στα Σχήματα 10.15(α) και 10.15(β).

Παράδειγμα 10.6 Θεωρούμε το σύστημα (10.26). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου οι τροχιές αλλάζουν κατεύθυνση.

Λύση: Παρατηρούμε από το Σχήμα (10.15) ότι τα ζητούμενα σημεία είναι ακριβώς αυτά όπου η y_1 μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται κατά μήκος των τροχιών. Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος χαρακτηρίζεται από τη σχέση

$$y_1' = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = \frac{1}{2}y_1.$$

10.1.5 Περίπτωση 4. Μηδενική ιδιοτιμή

Τέλος θεωρούμε την περίπτωση $\det A = 0$ δηλαδή την περίπτωση που μία τουλάχιστον από τις ιδιοτιμές είναι μηδενική. Θεωρούμε τις κανονικές μορφές που αντιστοιχούν σε πίνακα A με μία μηδενική ιδιοτιμή (περίπτωση 4α) ή σε πίνακα A με μηδενικές μόνο ιδιοτιμές (περιπτώσεις 4β και 4γ).

Περίπτωση 4α.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =: Ay.$$

Βρίσκουμε τα σημεία ισορροπίας:

$$Ay = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = 0,$$

δηλαδή σημεία ισορροπίας είναι όλα τα σημεία του y_1 -άξονα και μόνο αυτά.

Το σύστημα γράφεται πιο απλά

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda y_2$$

Το διάγραμμα φάσης είναι όπως στο Σχήμα 10.16.

Περίπτωση 4β.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =: Ay.$$

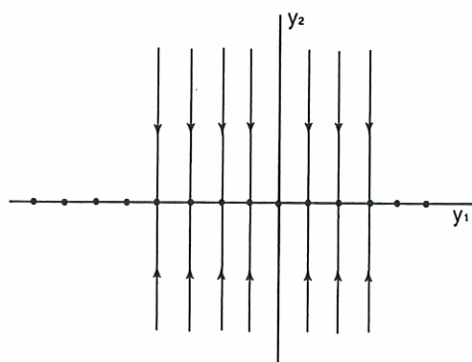
Τα σημεία ισορροπίας δίνονται από την

$$Ay = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = 0,$$

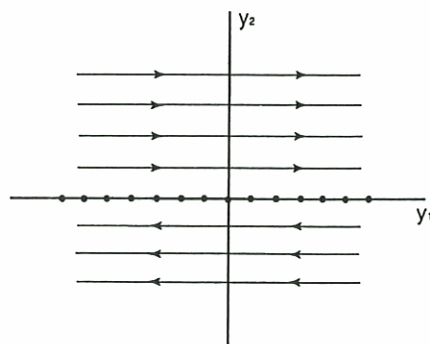
δηλαδή και σ' αυτή την περίπτωση τα σημεία ισορροπίας είναι ολόκληρος ο y_1 -άξονας.

Το σύστημα γράφεται πιο απλά

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 0.$$



Σχήμα 10.16: Μηδενική ιδιοτιμή, διαγώνια περίπτωση.



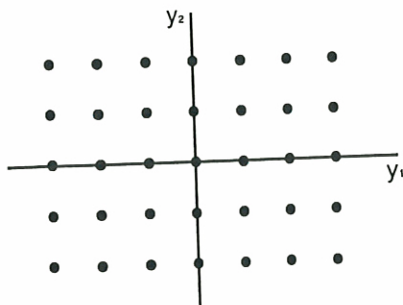
Σχήμα 10.17: Μηδενικές ιδιοτιμές, περίπτωση Jordan.

Το διάγραμμα φάσης όμως είναι τελείως διαφορετικό (βλ. Σχήμα 10.17), ενώ οι τροχιές εδώ δεν συγκλίνουν σε κάποιο σημείο ισορροπίας καθώς το $t \rightarrow +\infty$ ή $t \rightarrow -\infty$.

Περίπτωση 4γ.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =: Ay.$$

Στην περίπτωση αυτή όλα τα σημεία του επιπέδου φάσης είναι σημεία ισορροπίας (βλ. Σχήμα 10.18).



Σχήμα 10.18: Μηδενικές ιδιοτιμές, διαγωνοποιήσιμη περίπτωση.

Το επόμενο παράδειγμα μπορεί να αναχθεί με μετασχηματισμό σε μία από τις περιπτώσεις 4α και 4β.

Παράδειγμα 10.7 Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης του

$$x' = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} x,$$

για $|\varepsilon| \ll 1$.

Λύση: Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: $\varepsilon = 0$

Παρατηρούμε ότι $\det A = 0$ και συνεπώς υπάρχει μηδενική ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$. Τα σημεία ισορροπίας δίνονται από την

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 = 0.$$

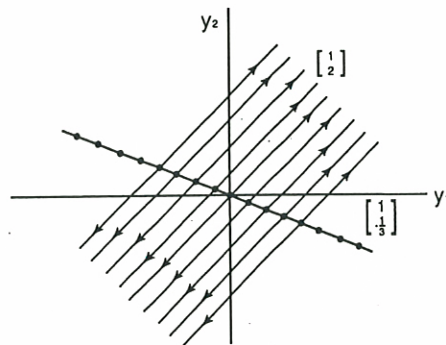
Επίσης αν λ_2 είναι η άλλη ιδιοτιμή του A , έχουμε από την $\text{tr} A = 7$ ότι $\lambda_1 + \lambda_2 = 7$ άρα $\lambda_2 = 7$. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα v_1 :

$$Av_1 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

και στην $\lambda_2 = 7$ το ιδιοδιάνυσμα v_2 :

$$Av_2 = 7v_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Στο Σχήμα 10.19 δίνεται το διάγραμμα φάσης.



Σχήμα 10.19: Παράδειγμα 10.7, $\varepsilon = 0$.

Περίπτωση 2η: $\varepsilon \neq 0$

Εδώ μελετούμε την επίδραση μιας μικρής διαταραχής ε , $|\varepsilon| \ll 1$, στο σύστημα της περίπτωσης 1. Προς το παρόν δεν κάνουμε διάκριση προσήμου. Έχουμε λοιπόν

$$\det A = 6(1 + \varepsilon) - 6 = 6\varepsilon \neq 0,$$

συνεπώς

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

δηλαδή το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Οι ιδιοτιμές δίνονται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 - (7 + \varepsilon)\lambda + 6\varepsilon = 0,$$

που είναι οι

$$\lambda_{\pm}(\varepsilon) = \frac{7 + \varepsilon \pm \sqrt{(7 + \varepsilon)^2 - 24\varepsilon}}{2}.$$

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor ως προς $\varepsilon = 0$:

$$\lambda_{\pm}(\varepsilon) = \lambda_{\pm}(0) + \lambda'_{\pm}(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

όπου κάναμε χρήση του συμβολισμού $g(\varepsilon) = O(|\varepsilon|^a)$ στο $\varepsilon = 0$: υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|g(\varepsilon)|}{|\varepsilon|^a} < M, \quad \text{όταν } |\varepsilon| \rightarrow 0.$$

Έχουμε αναλυτικά

$$\lambda_+(\varepsilon) = 7 + \frac{\varepsilon}{7} + O(\varepsilon^2) \quad , \quad \lambda_-(\varepsilon) = \frac{6}{7}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (10.27)$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που καθορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_{\pm}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα παίρνουμε τη σχέση

$$x_2 = -\frac{1}{3}[(1 + \varepsilon) - \lambda_{\pm}(\varepsilon)]x_1$$

και επιλέγουμε τα ιδιοδιανύσματα

$$v_+(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{7}\right) + O(\varepsilon^2) \end{bmatrix}$$

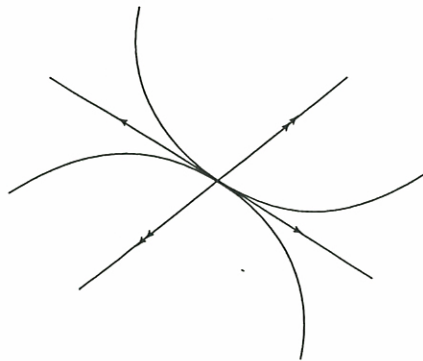
και

$$v_-(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{7}\right) + O(\varepsilon^2) \end{bmatrix}.$$

Διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του ε :

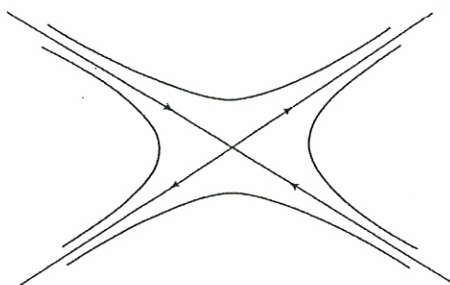
Περίπτωση (α): $\varepsilon > 0$

Από την (10.27) προκύπτει ότι για ε αρκετά μικρό έχουμε ότι $\lambda_{\pm}(\varepsilon) > 0$ και συνεπώς έχουμε ασταθή κόμβο (βλ. Σχήμα 10.20).



Σχήμα 10.20: Παράδειγμα 10.7, $\varepsilon > 0$.

Περίπτωση (β): $\varepsilon < 0$ Στην περίπτωση αυτή είναι $\lambda_+(\varepsilon) > 0$ και $\lambda_-(\varepsilon) < 0$ για $|\varepsilon|$ αρκετά μικρό επομένως έχουμε σαγματικό σημείο (βλ. Σχήμα 10.21).

Σχήμα 10.21: Παράδειγμα 10.7, $\varepsilon < 0$.

Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα φάσης 10.20 και 10.21 αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές μικρές διαταραχές του διαγράμματος 10.19.

Η εκτίμηση που ακολουθεί είναι σημαντική στη θεωρία ευστάθειας.

Παράδειγμα 10.8 Θεωρούμε το σύστημα

$$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Εάν λ_1 και λ_2 οι ιδιοτιμές του A και

$$\lambda_{max} = \max_{i=1,2} \operatorname{Re} \lambda_i,$$

τότε ναδειχθεί ότι:

1. Δοθέντος $\beta > \lambda_{max}$, υπάρχει $k = k(\beta)$ ανεξάρτητη του y_0 , έτσι ώστε για $t > 0$ ισχύει η εκτίμηση

$$\|e^{At} y_0\| \leq k e^{-\beta t} \|y_0\|. \quad (10.28)$$

Κατά συνέπεια αν $\lambda_{max} < 0$ τότε το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές,

2. η επιλογή $\beta = \lambda_{max}$ δεν είναι εν γένει δυνατή, θεωρώντας ως αντιπαράδειγμα το σύστημα μη απλής δομής

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y. \quad (10.29)$$

Λύση: (για μια πολύ σύντομη και κομψή απόδειξη βλ. ασκ. 10.43) 1. Θεωρούμε περιπτώσεις:

(α) Διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές
 Η λύση ως γνωστόν δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{y}_0 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2, \quad (10.30)$$

όπου $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ μοναδιαία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, ανεξάρτητα του \mathbf{y}_0 . Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &\leq |c_1| e^{\lambda_1 t} + |c_2| e^{\lambda_2 t} \\ &\leq (|c_1| + |c_2|) e^{mt}, \end{aligned} \quad (10.31)$$

όπου

$$m := \max_{i=1,2} \lambda_i = \lambda_{\max}.$$

Στη συνέχεια εκτιμούμε τα c_1 και c_2 μέσω του \mathbf{y}_0 . Παίρνοντας τα εσωτερικά γινόμενα έχουμε

$$\begin{cases} \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_1 = c_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_2 = c_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + c_2 \end{cases} \quad (10.32)$$

Εάν $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ τότε $\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_1 = c_1$, $\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_2 = c_2$ και κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz παίρνουμε

$$|c_1| \leq \|\mathbf{y}_0\|, \quad |c_2| \leq \|\mathbf{y}_0\|.$$

Έπεται από την (10.30) ότι

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq 2\|\mathbf{y}_0\| e^{-at},$$

όπου $-a = m$ και συνεπώς η εκτίμηση (10.28) ισχύει.

Εάν $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \neq 0$ τότε επιλύοντας το σύστημα (10.32) έχουμε

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & 1 \end{vmatrix}},$$

επομένως

$$\begin{aligned} |c_1| &\leq \frac{|\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_1| + |\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}_2| |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2|}{1 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2} \\ &\leq \frac{\|\mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{y}_0\|}{1 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2} = \frac{2\|\mathbf{y}_0\|}{1 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2} \end{aligned} \quad (10.33)$$

και ομοίως για το $|c_2|$. Από την (10.31) έχουμε

$$\|\mathbf{y}_0\| \leq \frac{2\|\mathbf{y}_0\|}{1 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2} e^{-at},$$

όπου $-a = \max_{i=1,2} \lambda_i < 0$.

(β) Ίσες πραγματικές ιδιοτιμές

Η λύση σε αυτή την περίπτωση δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{y}(t) = (c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}) e^{\lambda t},$$

με

$$\mathbf{y}_0 = c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}, \quad \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1,$$

αν ο A είναι απλής δομής και από τον τύπο

$$\mathbf{y}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \mathbf{u} + c_2 e^{\lambda t} \mathbf{v},$$

με

$$\mathbf{y}_0 = c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}, \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbf{v} = (A - \lambda I_2) \mathbf{u},$$

αν ο A δεν είναι απλής δομής. Και στις δύο περιπτώσεις τα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} είναι γραμμικά ανεξάρτητα, καθώς και ανεξάρτητα του \mathbf{y}_0 .

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq (|c_1| \|\mathbf{u}\| + |c_2| \|\mathbf{v}\|) e^{\lambda t} = (|c_1| + |c_2|) e^{\lambda t}.$$

Κάνοντας χρήση των παραπάνω εκτιμήσεων (10.34) για τα $|c_1|, |c_2|$ καταλήγουμε στη (10.28) με $-a = \max_{i=1,2} \lambda_i < 0$.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &\leq (|c_1 + c_2 t| + |c_2| \|\mathbf{v}\|) e^{\lambda t} \\ &\leq (|c_1| + |c_2| t + |c_2| \|A - \lambda I_2\|) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Εάν μεν τα \mathbf{u} και \mathbf{v} είναι ορθογώνια έχουμε $\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u} = c_1$ και $\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{v} = c_2$, απ' όπου μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwartz συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &\leq (\|\mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{y}_0\| t + \|\mathbf{y}_0\|) e^{\lambda t} \\ &= (2\|\mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{y}_0\| t) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Εάν τα \mathbf{u} και \mathbf{v} δεν είναι ορθογώνια τότε εκτιμούμε τα c_1 και c_2 μέσω του \mathbf{y}_0 . Παίρνοντας τα εσωτερικά γινόμενα έχουμε:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u} = c_1 + c_2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{v} = c_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + c_2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \end{cases}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{vmatrix}}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} |c_1| &\leq \frac{|\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{u}| |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| + |\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{v}| |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &\leq \frac{\|\mathbf{y}_0\| \|\mathbf{v}\|^4 + \|\mathbf{y}_0\| \|\mathbf{v}\|^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &\leq \|\mathbf{y}_0\| \left(\frac{\|A - \lambda I_2\|^4 + \|A - \lambda I_2\|^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \right), \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz και της εκτίμησης

$$\|\mathbf{v}\| = \|(A - \lambda I_2)\mathbf{u}\| \leq \|A - \lambda I_2\| \|\mathbf{u}\| = \|A - \lambda I_2\|.$$

Επίσης, από τη γραμμική ανεξαρτησία των \mathbf{u} και \mathbf{v} έπεται ότι

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| < \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$$

και κατά συνέπεια ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδέν. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχει σταθερά c^* τέτοια ώστε

$$|c_1| \leq c^* \|\mathbf{y}_0\|$$

και με παρόμοιους συλλογισμούς δείχνουμε την εκτίμηση

$$|c_2| \leq c_* \|\mathbf{y}_0\|.$$

Κάνοντας χρήση αυτών των εκτιμήσεων παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &\leq (|c_1| + |c_2|t + |c_2| \|A - \lambda I_2\|) e^{\lambda t} \\ &\leq c \|\mathbf{y}_0\| (1 + t + \|A - \lambda I_2\|) e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

όπου $c = \max\{c^*, c_*\}$.

Δοθέντος a που ικανοποιεί την (;;) και κάνοντας χρήση της $\lambda < -a$ είναι απλό να βρούμε σταθερά $k_1 > 0$ τέτοια ώστε

$$te^{\lambda t} < k_1 e^{-at}, \quad t \geq 0.$$

Η εκτίμηση (10.28) τώρα προκύπτει εύκολα.

(γ) Συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές

Η λύση στην περίπτωση αυτή δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{y}(t) = Re^{(\operatorname{Re} \lambda)t} [\cos(\omega t + \delta)\mathbf{u} - \sin(\omega t + \delta)\mathbf{v}],$$

με

$$\mathbf{y}_0 = c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}, \quad R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1,$$

όπου τα u και v είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όπως και στην περίπτωση (α), προκύπτουν οι εκτιμήσεις

$$|c_1| \leq \|y_0\|, \quad |c_2| \leq \|y_0\|,$$

αν $u \cdot v = 0$ και

$$|c_1| \leq \frac{2\|y_0\|}{1 - (u \cdot v)^2}, \quad |c_2| \leq \frac{2\|y_0\|}{1 - (u \cdot v)^2},$$

αν $u \cdot v \neq 0$. Μέσω αυτών συνάγεται η εκτίμηση (10.28).

2. Επιλύουμε το (10.30):

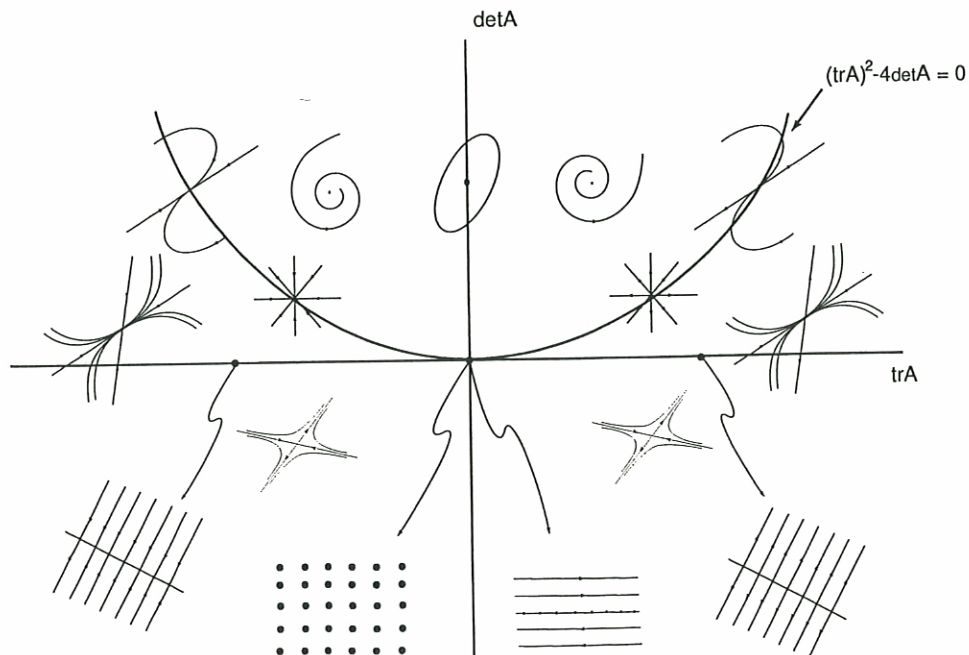
$$y(t) = \begin{bmatrix} y_{01} + y_{02}t \\ y_{02} \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\lambda_{max} \leq 0$. Προφανώς η επιλογή $a = 0$ δεν είναι δυνατή διότι η εκτίμηση

$$\|y(t)\| \leq ke^{-0 \cdot t} \|y_0\| = k \|y_0\|,$$

δεν ισχύει για οποιοδήποτε k .

Κλείνουμε την ενότητα συνοψίζοντας τα διαγράμματα φάσης στο επίπεδο με το Σχήμα 10.22.



Σχήμα 10.22: Γεωμετρική ταξινόμηση των γραμμικών συστημάτων 2×2 .

Υπενθυμίζουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0$, με διακρίνουσα $(\text{tr } A)^2 - 4 \det A$. Συνεπώς η παραβολή

$$\det A = \frac{1}{4}(\text{tr } A)^2 \quad (10.35)$$

διαχωρίζει τη μιγαδική από την πραγματική περίπτωση. Επί του οριζόντιου άξονα έχουμε τις περιπτώσεις για τις οποίες είναι $\det A = 0$. Μία διαταραχή ενός τέτοιου συστήματος οδηγεί σε κόμβο ή σε σάγμα (βλ. Παράδειγμα 10.7). Η αρχή των αξόνων αντιστοιχεί σε δύο περιπτώσεις: (α) την πλήρως εκφυλισμένη περίπτωση $A = 0$, όπου όλα τα σημεία στο επίπεδο είναι σημεία ισορροπίας του συστήματος και (β) την περίπτωση Jordan όπου το μηδέν έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 αλλά γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Στον κάθετο άξονα το ίχνος $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2$ μηδενίζεται. Στη μιγαδική περίπτωση, αυτό ισοδυναμεί με την $\text{Re } \lambda = 0$ που αντιστοιχεί σε κέντρο. Πάνω στην παραβολή (10.35) έχουμε διπλή ιδιοτιμή και συνεπώς αστεροειδή ή νόθο κόμβο. Μέσα στην παραβολή έχουμε ευσταθή ή ασταθή εστία ανάλογα με το αν $\text{tr } A < 0$ ή $\text{tr } A > 0$. Έξω από την παραβολή στο πάνω ημιεπίπεδο έχουμε πραγματικές ιδιοτιμές με το ίδιο πρόσημο και συνεπώς κόμβο, ευσταθή ή ασταθή ανάλογα με το αν $\text{tr } A < 0$ ή $\text{tr } A > 0$. Τέλος στο κάτω ημιεπίπεδο έχουμε ιδιοτιμές με αντίθετο πρόσημο, περίπτωση που αντιστοιχεί σε σάγμα.

10.2 Καμπύλες στάθμης – Η εξίσωση του Νεύτωνα

Στην ενότητα αυτή, κάνουμε χρήση του επιπέδου φάσης για να μελετήσουμε μη γραμμικά συστήματα. Ξεκινούμε με εξισώσεις δευτέρου βαθμού, συγκεκριμένα την εξίσωση του Νεύτωνα για την κίνηση ενός υλικού σημείου σε ένα μονοδιάστατο μέσο, τις οποίες στη συνέχεια γράφουμε σε μορφή συστήματος.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$x'' - f(x) = 0, \quad (10.36)$$

όπου η f είναι συνάρτηση C^1 . Γράφουμε την (10.36) σε μορφή συστήματος:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1). \end{cases} \quad (10.37)$$

Καλούμε τις ποσότητες

$$T = \frac{1}{2}(x')^2 = \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{Κινητική Ενέργεια}$$

$$U = -\int_0^x f(\xi) d\xi \quad \text{Δυναμική Ενέργεια}$$

$$H = T + U \quad \text{Ολική Μηχανική Ενέργεια}$$

Το επόμενο Θεώρημα είναι η μαθηματική διατύπωση της Αρχής διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.